Sistemas de Control

apuntes capítulo I
(introducción y modelos)

Facultad de Ingeniería - UNCPBA

Dto. de Ingeniería Electromecánica

Prof: Dr. Gerardo Acosta

➢ OBJETIVOS DEL CAPÍTULO I

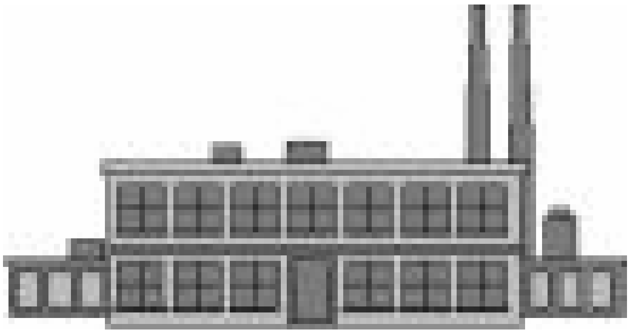
- ✓ *Definir el control de procesos industriales*
- ✓ *Describir las necesidades e incentivos para controlar procesos industriales*
- ✓ *Analizar sus características para abordar diseños de los sistemas de control a emplear*
- ✓ *Obtener y emplear modelos matemáticos para resolver el problema de control*

PROCESO

- *en general: operación consistente en una serie de acciones tendientes hacia un fin*
- *en particular: convertir materias primas en productos deseados*
  - mediante transormaciones físicas y/o químicas
  - optimizando una figura de mérito

PLANTA

- *en general: conjunto de dispositivos cuyo objetivo es realizar una operación determinada*
- *en particular: arreglo de unidades de procesamiento (reactores, hornos, plegadoras, motores, depósitos, columnas de destilación, ...)*
  - integradas entre sí en base a cierto criterio racional
  - satisfaciendo ciertos requerimientos



Requerimientos

- Seguridad
  - *para la gente y equipos de la planta*
- Especificaciones de Producción
  - *debe producir las cantidades y calidades del producto que se requiere*
    - P.e.: L'Amalí produce 5.300 tn de clinker, con un porcentaje de cal libre < 1%, consumiendo 40 MW
- Regulaciones ambientales
  - *cumplir con leyes referidas a efluentes, emanaciones, impacto ambiental*
- Restricciones de Operación
  - *los equipos tienen limitaciones de operación que deben respetarse*
- Economía
  - *la operación de la planta tiene en cuenta un mercado:*
    - disponibilidad de materias primas
    - demanda del producto final
    - minimizar costos

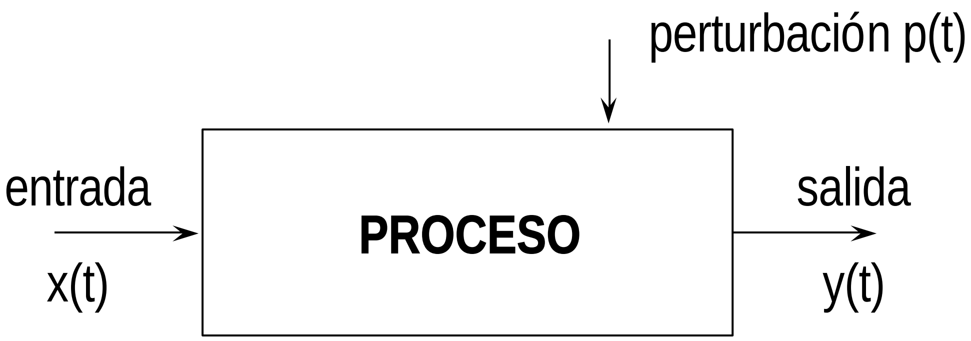
➢ OBJETIVOS DEL CAPÍTULO I

- ✓ *Definir el control de procesos industriales*
- ✓ *Describir las necesidades e incentivos para controlar procesos industriales*
- ✓ *Analizar sus características para abordar diseños de los sistemas de control a emplear*
- ✓ *Obtener y emplear modelos matemáticos para resolver el problema de control*

- Para satisfacer los requerimientos surge la necesidad de un S.C.
- Básicamente, 3 clases de necesidades :
  - ✓ *Suprimir la influencia de perturbaciones externas*
  - ✓ *Asegurar la estabilidad*
  - ✓ *Optimizar el desempeño*

Suprimir influencia de perturbaciones

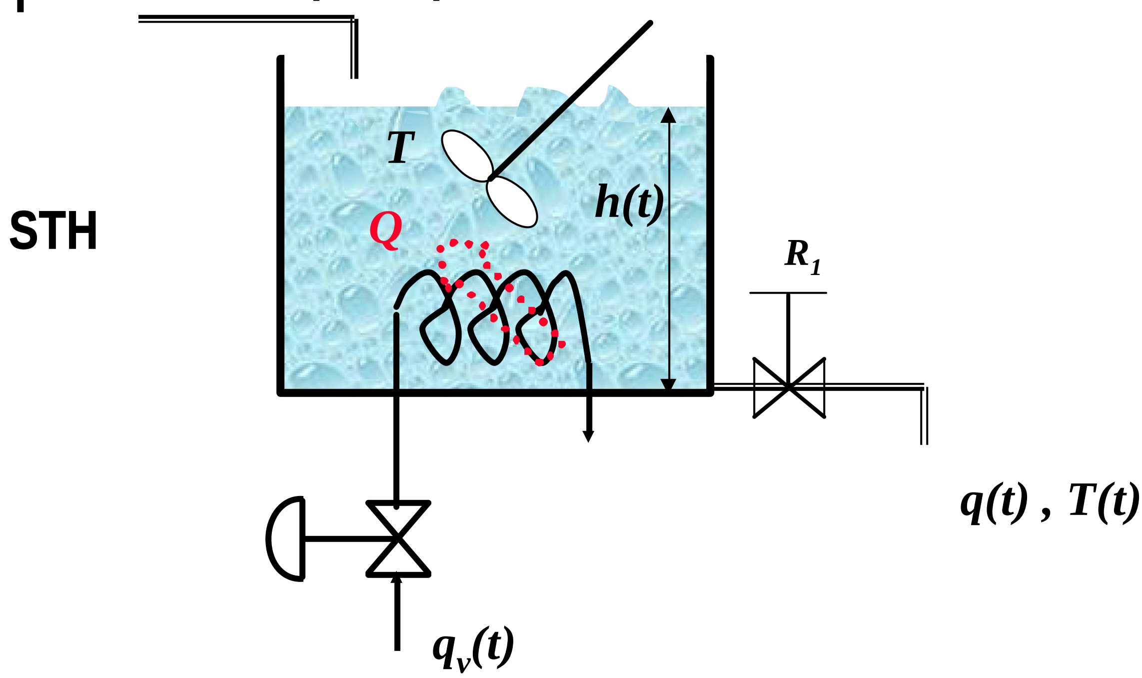
- ✓ *una perturbación es una señal que afecta adversamente a la salida*



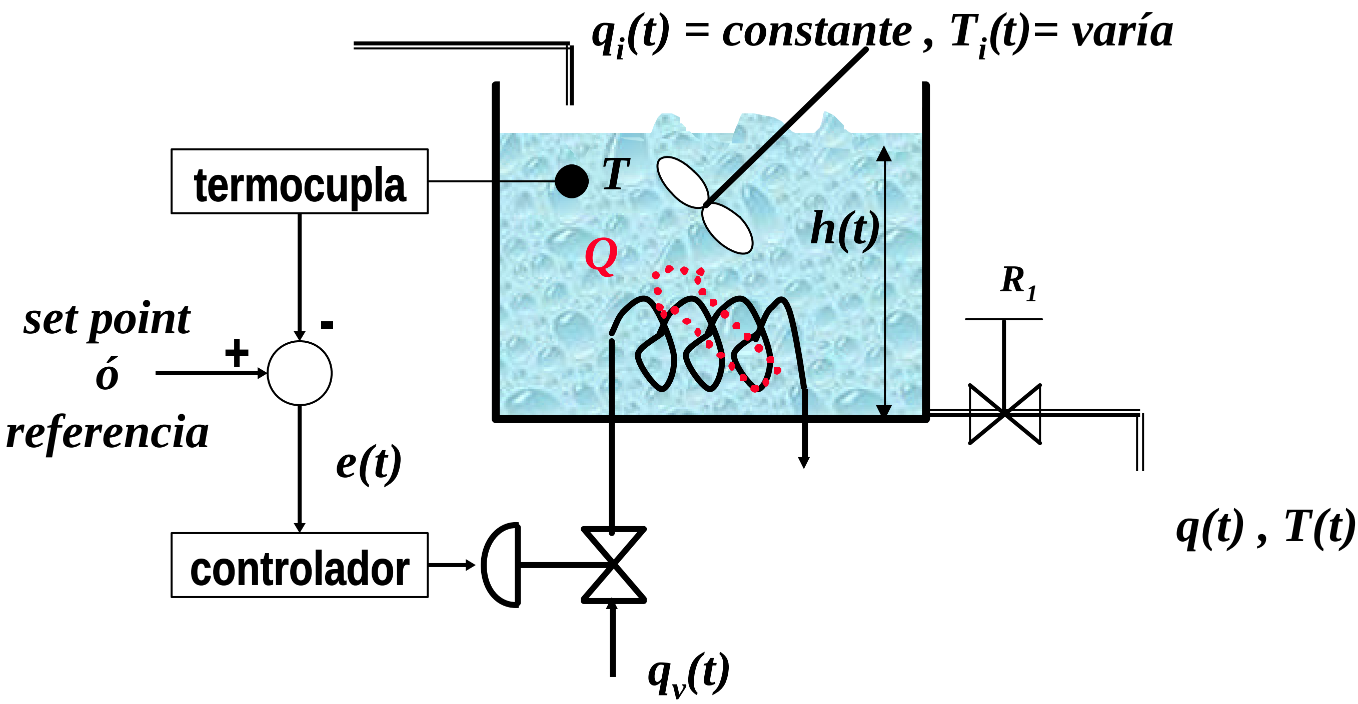
- el medio interactúa con nuestro proceso

¿Para qué controlar?

- Ejemplo 1:

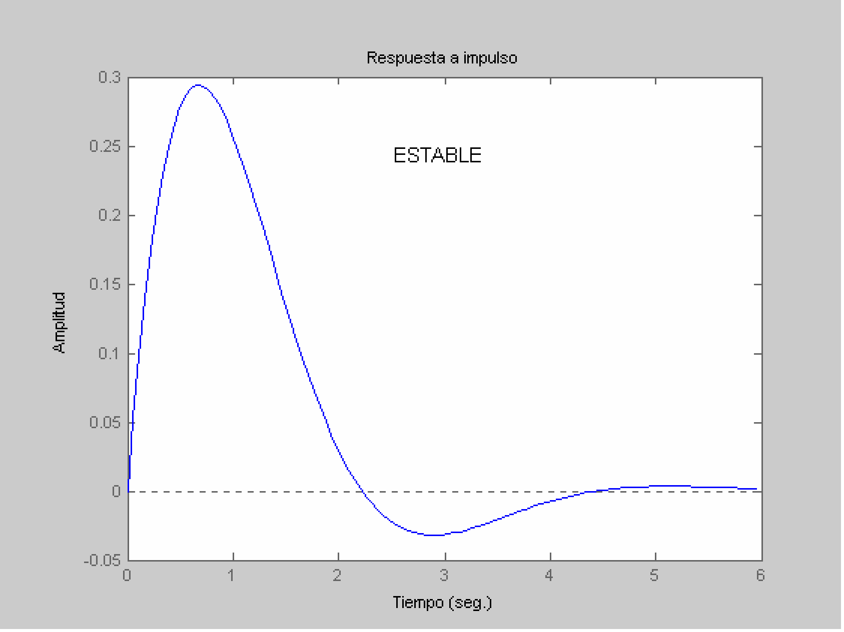


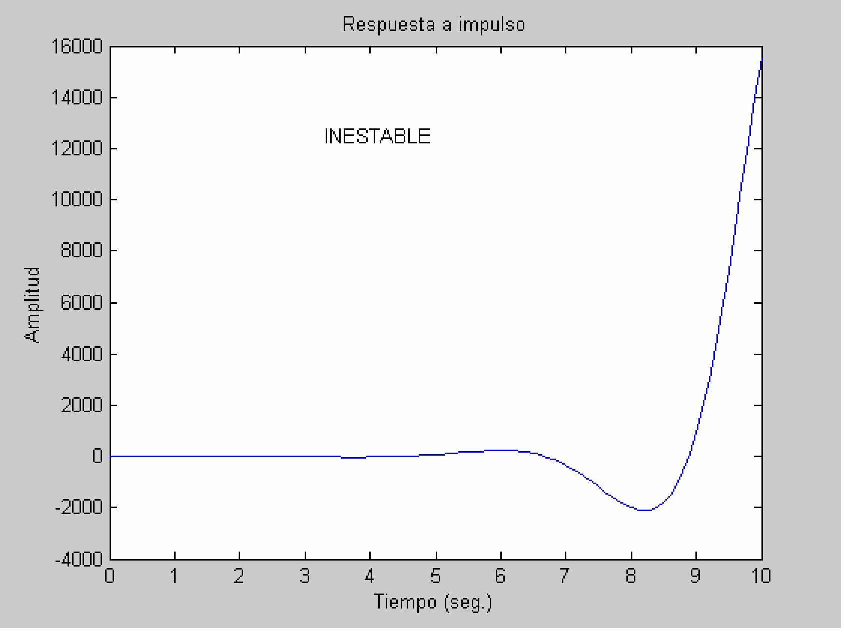
- ✓ *objetivo: mantener **T** y **V** en una referencia*
- ✓ *problema: T_i varía; solución: sistema de control*



Asegurar la estabilidad

✓ *que la respuesta transitoria se extinga al extinguirse la excitación*



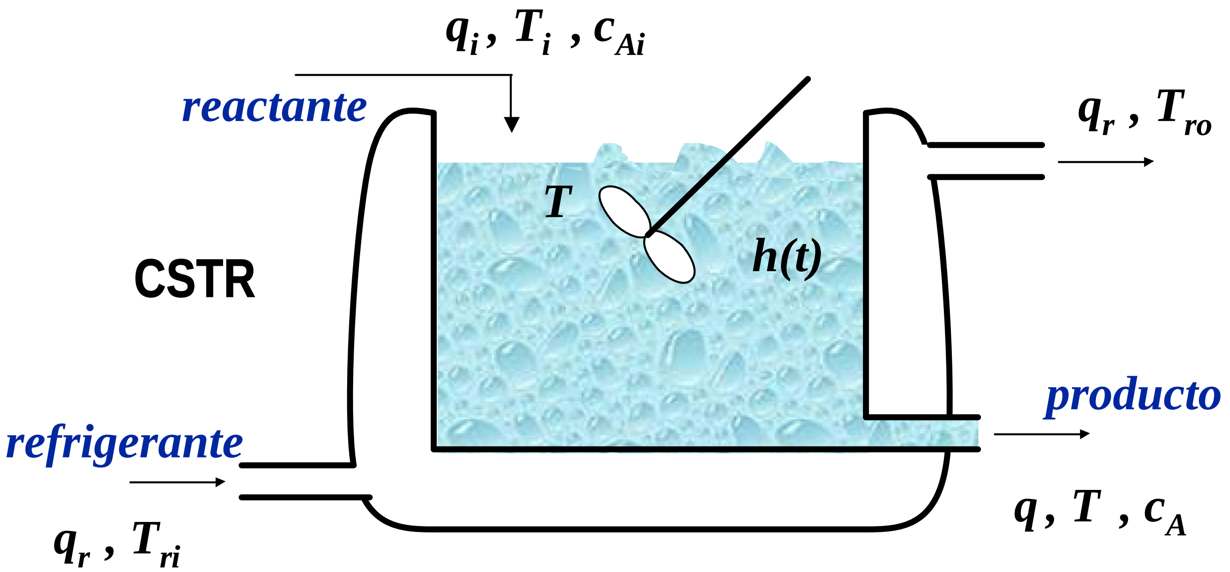


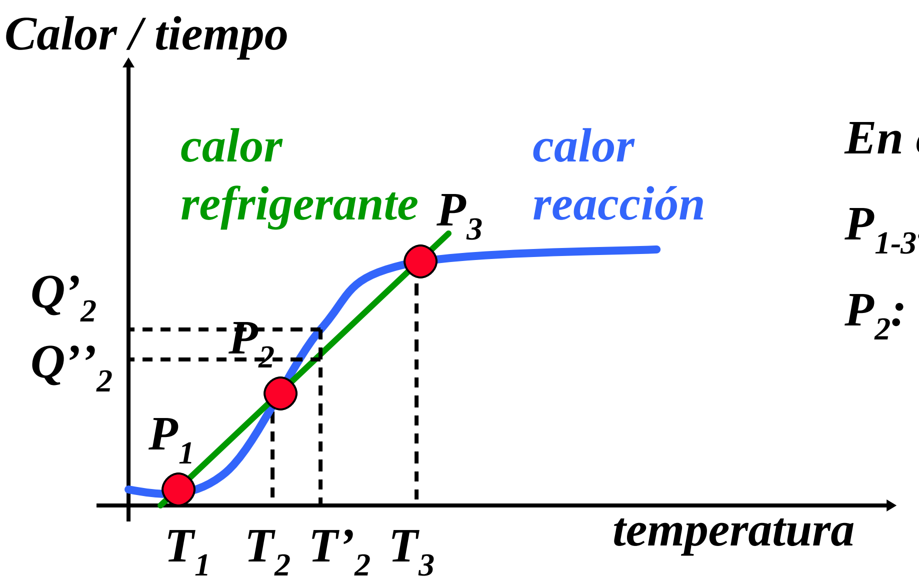
¿Para qué controlar?

✓ *un proceso inestable puede estabilizarse*

- e incluso funcionar mejor en el equilibrio inestable

➢ Ejemplo 2: CSTR con camisa enfriadora en el cual se produce una reacción exotérmica ***A —› B***





En estado estacionario:

$P_{1\text{-}3}$: estables

P_2: inestable

¿Para qué controlar?

- ✓ *supongamos partir de P_2 (equilibrio inestable) el sistema pasa rápidamente a P_1 ó P_3*
- ✓ *sin embargo se puede desear trabajar en P_2*
  - término medio entre poca reacción y funcionamiento inseguro
  - se puede cerrar un lazo entre la temperatura de reacción y el caudal del refrigerante

Optimizar el desempeño

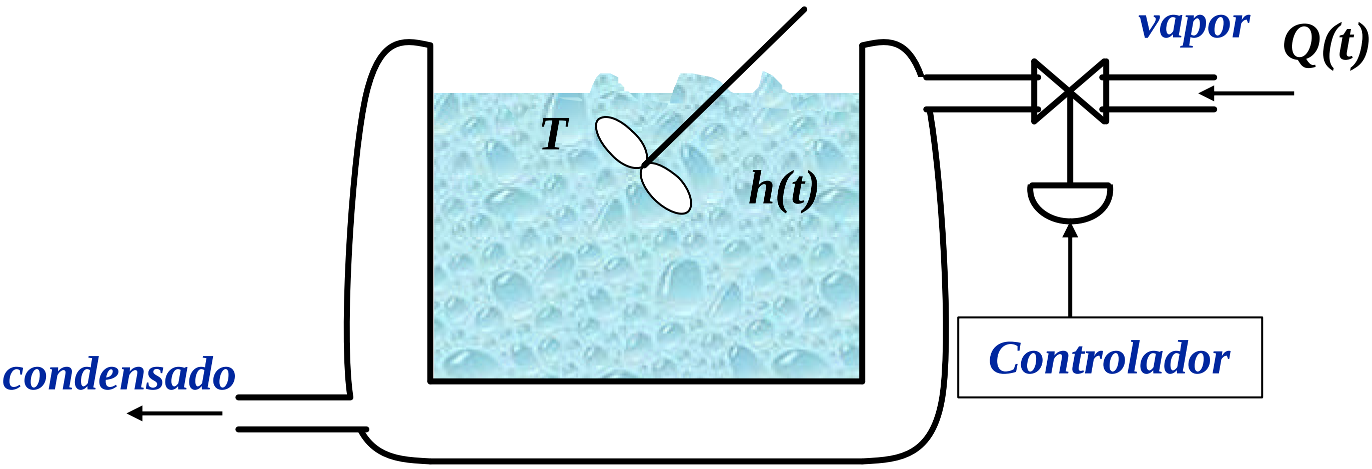
- ✓ *una vez alcanzadas las especificaciones y que se tiene un comportamiento estable (y seguro), se busca el mejor desempeño*
  - figura de mérito: más rentable, menos impacto ambiental, ...

➢ Ejemplo 3: CSTR con camisa enfriadora en el cual se produce una reacción endotérmica con cierta dinámica

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

- ✓ *el calor de reacción lo proveemos con vapor*
- ✓ *el producto deseado es **B**; el **C** es desecho*

¿Para qué controlar?



$$J = \int_0^{t_R} \{\text{ingreso ventas } B \text{ - costo vapor}\} dt - \text{costo } A$$

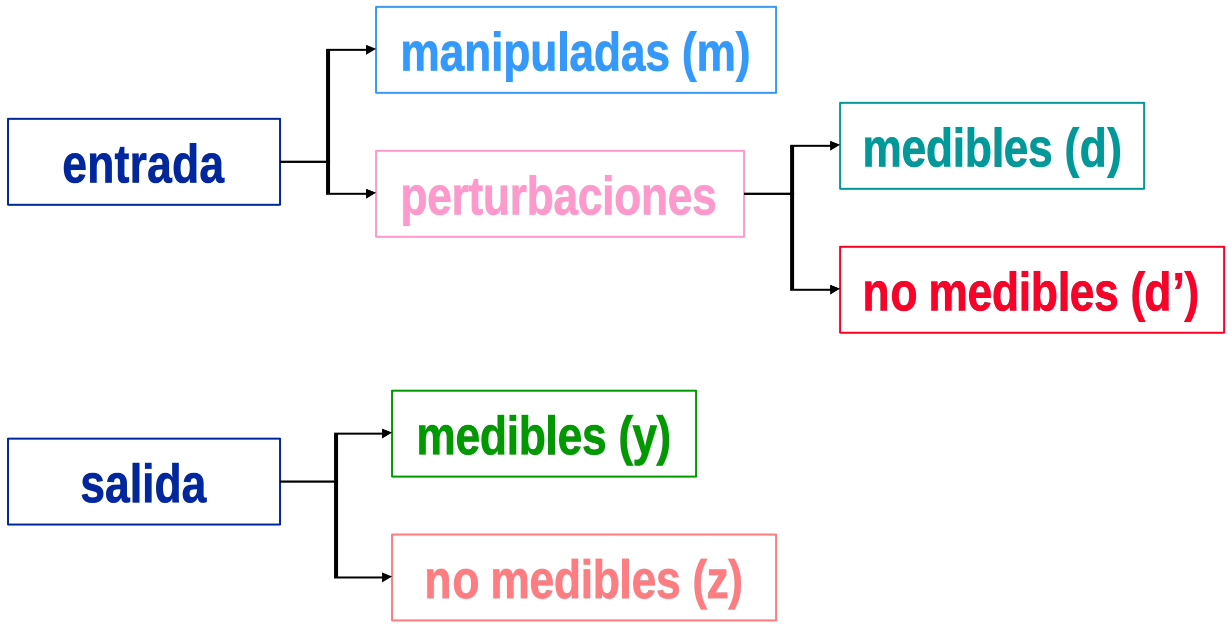
- ✓ *podemos maximizar **J** con el caudal **Q***
- ✓ *si $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_{max}$ se obtiene mucho **B**, pero también mucho **C** y el costo del vapor es alto*
- ✓ *si $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_{min}$ se paga poco por el vapor, pero se obtiene poco **B***
- ✓ *sin embargo, una variación de **Q** adecuada, puede optimizar el beneficio económico.*

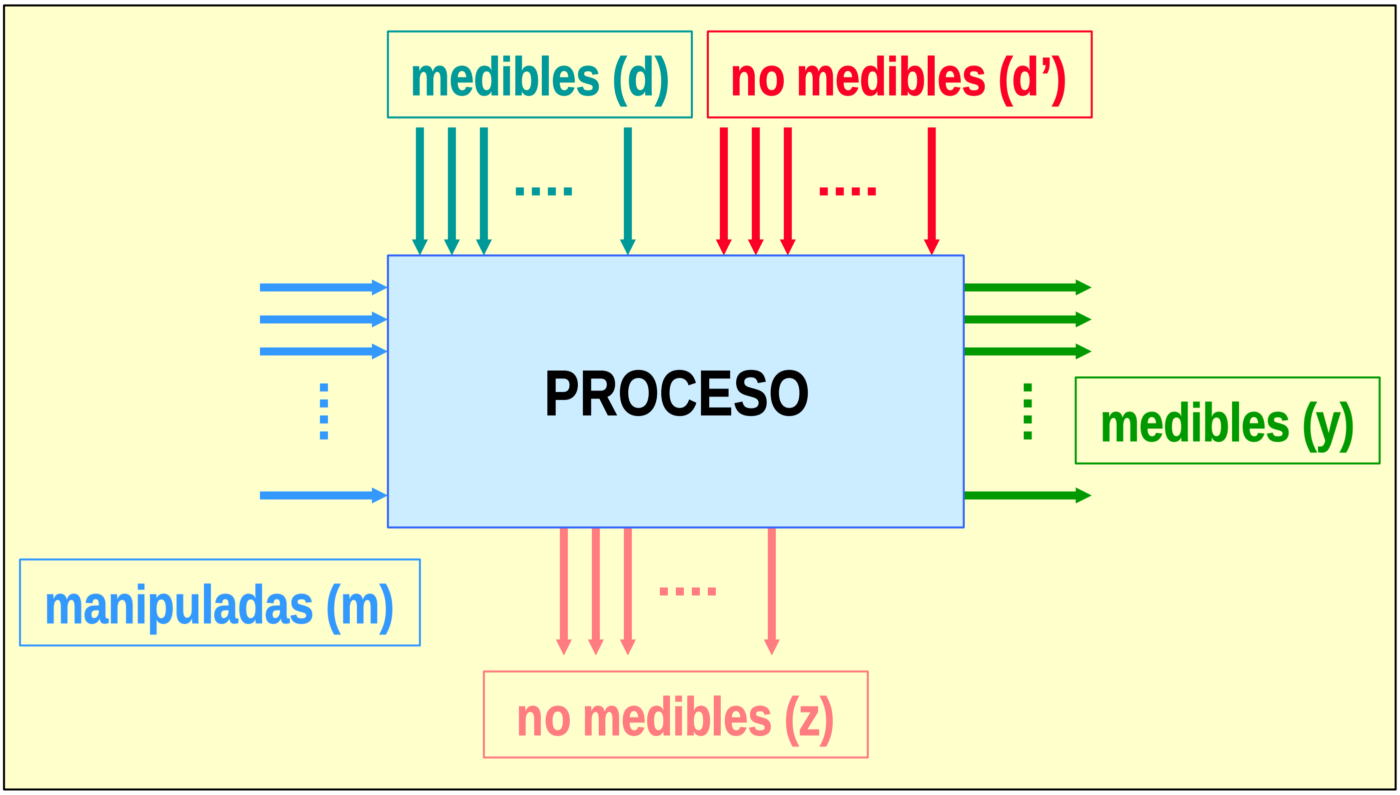
OBJETIVOS DEL CAPÍTULO I

- ✓ *Definir el control de procesos industriales*
- ✓ *Describir las necesidades e incentivos para controlar procesos industriales*
- ✓ *Analizar sus características para abordar diseños de los sistemas de control a emplear*
- ✓ *Obtener y emplear modelos matemáticos para resolver el problema de control*

Aspectos de diseño del sistema de control

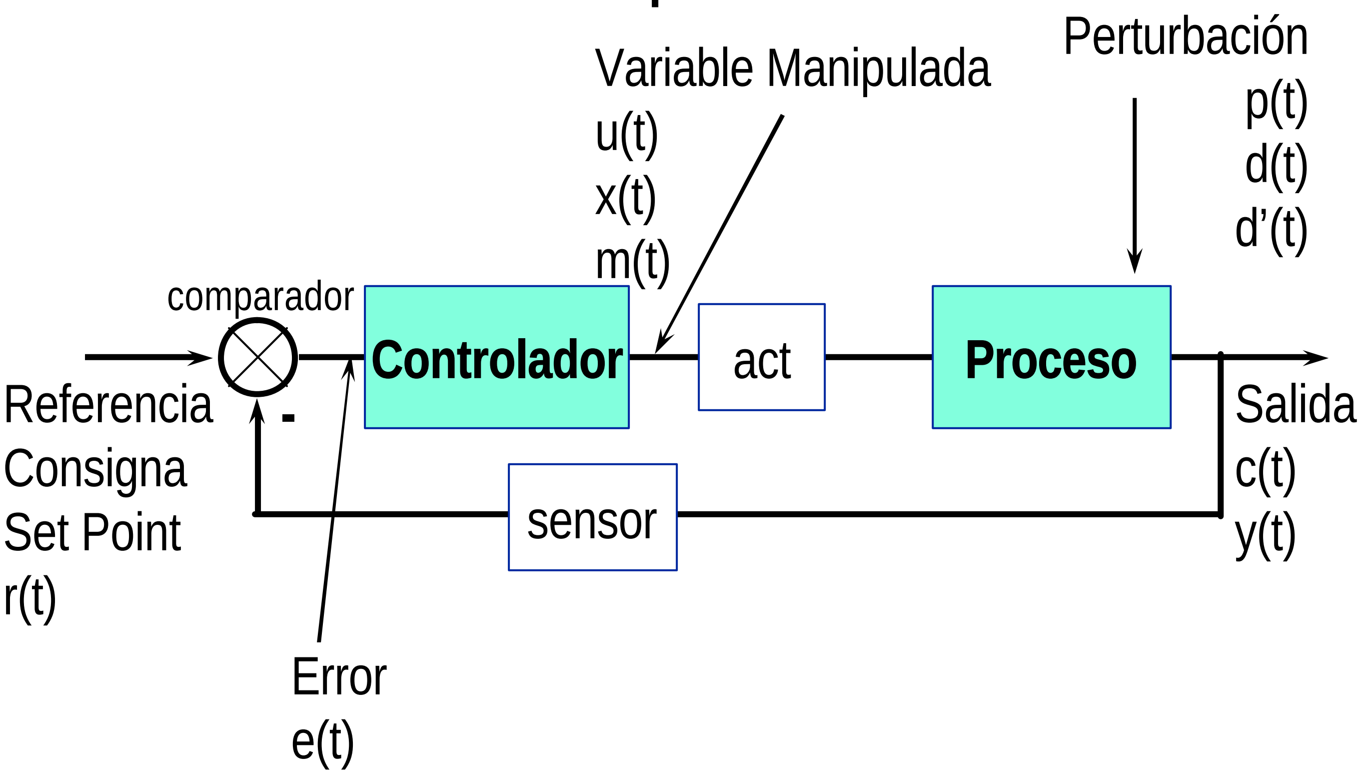
- Clasificación de las variables en un proceso





Aspectos de diseño del sistema de control

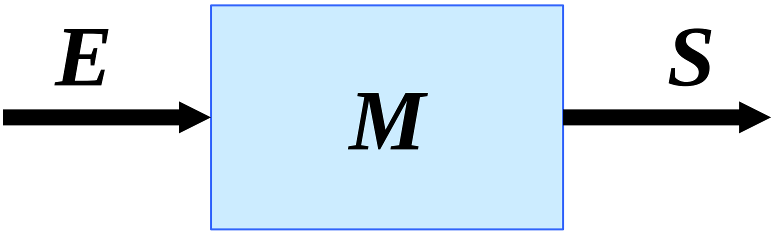
- Lazo de control típico



- Al diseñar un S.C. se mezclan:
  - *análisis*
    - de lo que tengo (el proceso)
  - *síntesis*
    - de cómo consigo lo que quiero (el controlador y demás elementos)
  - *combinación de 3 tipos de problemas en sí mismos*

3 problemas

- Sean



M: *un modelo de la planta*

E: *las entradas*

S: *las salidas*

- ✓ *suponemos conocidos 2 de ellos y el problema se define en determinar el tercero:*

CONOZCO:	DETERMINO:	NOMBRE DEL PROBLEMA:
E, S	***M***	***IDENTIFICACIÓN***
E, M	***S***	***SIMULACIÓN***
M, S	***E***	***CONTROL***

- ✓ *cada uno es una materia en sí misma*
- ✓ *el énfasis estará puesto en el control pero haremos uso de los otros*

Elementos de diseño del sistema de control

- Definición de los objetivos de control
- Selección de las mediciones
- Selección de las variables manipuladas
- Selección de la configuración de control y del controlador

Definición de los objetivos de control

- ✓ *¿cuáles son los objetivos operacionales que se espera alcance el S.C.?*
- ✓ *los objetivos tienen que ver con 1. rechazo a perturbaciones, 2. estabilidad, 3. optimización, 4. combinación de éstos*
  - ¿trabajaremos en un punto de operación inestable?
  - ¿será un regulador, un servomecanismo, o ambos?
- ✓ *surgen así especificaciones en cuanto a:*
  - velocidad de la respuesta (transitorio)
  - precisión de la respuesta (estado estacionario)

Selección de las mediciones

- ✓ *¿qué variables medir?*
- ✓ *se requiere de algún modo de monitorizar el desempeño del proceso*
- ✓ *midiendo variables (temp., presiones, caudales, etc.)*
  - si no son directamente medibles, hay que estimarlas a partir de otras
  - ¿disponemos de modelos lineales o no lineales del proceso?
  - ¿modelos variantes o invariantes en el tiempo?

Selección de las variables manipuladas

- ✓ *¿cuáles son las variables que inciden directamente en el comportamiento del proceso?*
  - ¿cuáles están fácilmente disponibles?
  - analizar desacoplamiento entre varias entradas y varias salidas
  - si se obtienen los mismos resultados sobre la variable controlada, analizar la duración de los actuadores

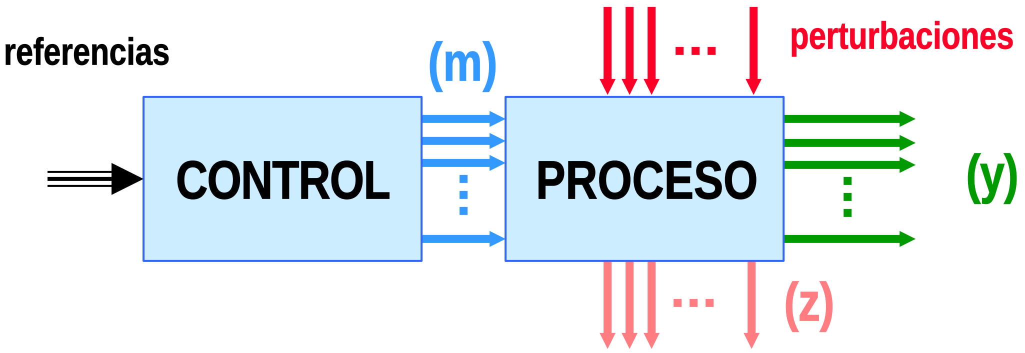
Selección de la configuración de control y el controlador

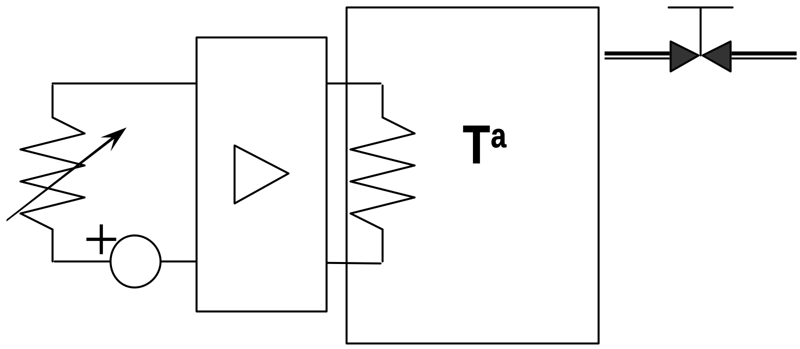
- *¿cuál es la estructura de la información que conecta las mediciones disponibles con las variables manipuladas disponibles?*
- *esta estructura comprende claramente dos aspectos:*
  - Instrumentación
    - ¿cómo accederemos a las variables elegidas?
    - ¿qué errores se tolerarán en las mediciones?
    - ¿qué nivel de no linealidades introducen sensores y actuadores?
    - ¿hacen falta registradores?
  - Estrategia
    - ¿qué ley de control?
    - ¿proporcional al error, a su integral, a su derivada? ¿adaptativa? ¿predictiva?
    - ¿cuál será el soporte físico de esta ley? (Controlador)

- En función del uso de la información de la variable controlada (VC):
  - Lazo abierto
  - Realimentación (negativa)
  - Inferencial
  - Avanacción

✓ *LAZO ABIERTO*

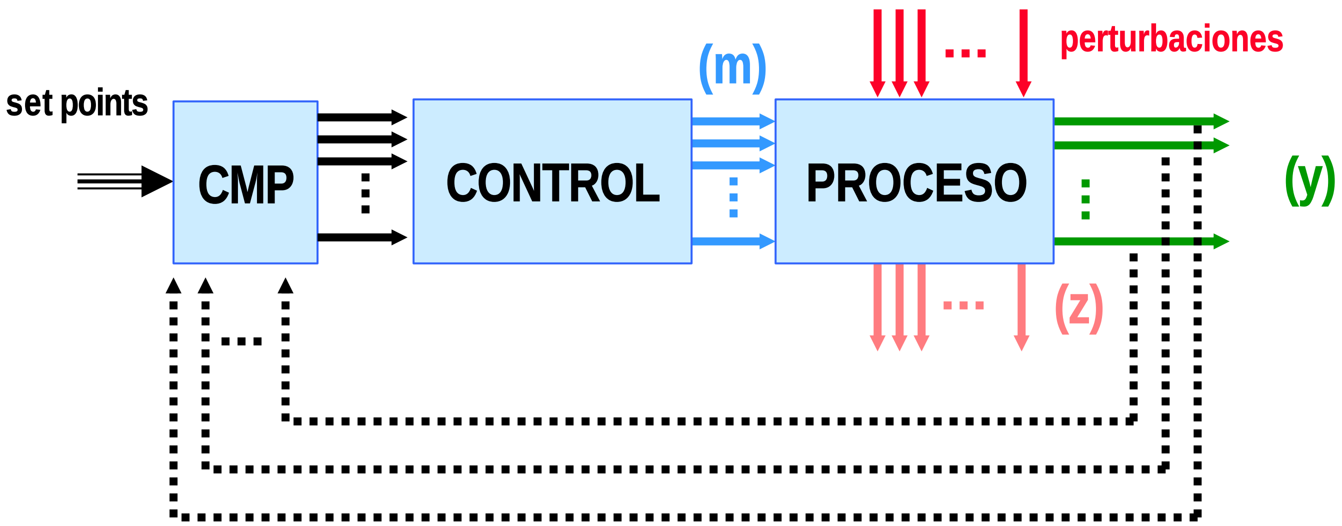
- se usa información de la VC sólo una vez (en la calibración del equipo)

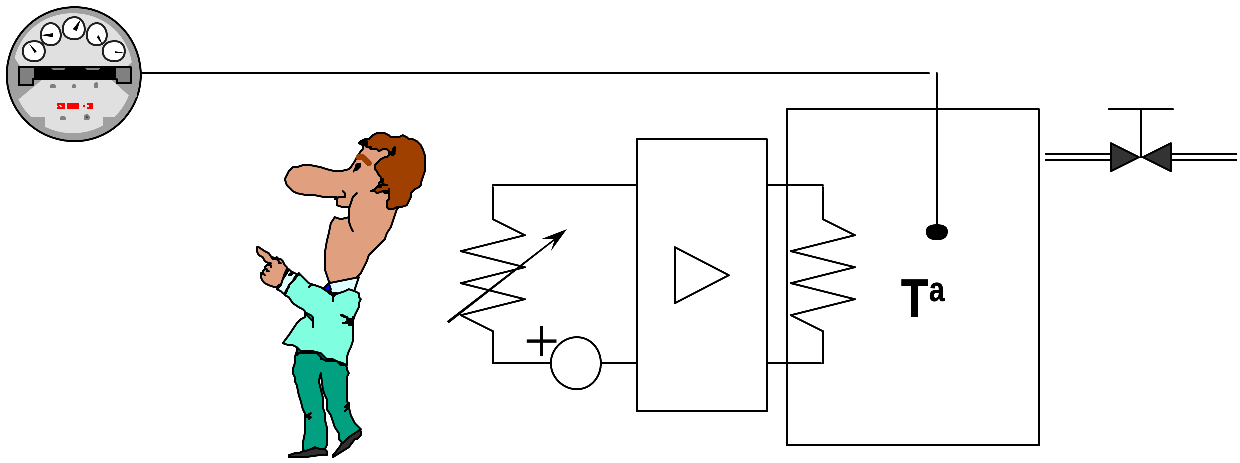




✓ *LAZO CERRADO ó REALIMENTACIÓN*

- se usa información de la VC para ajustar la variable manipulada

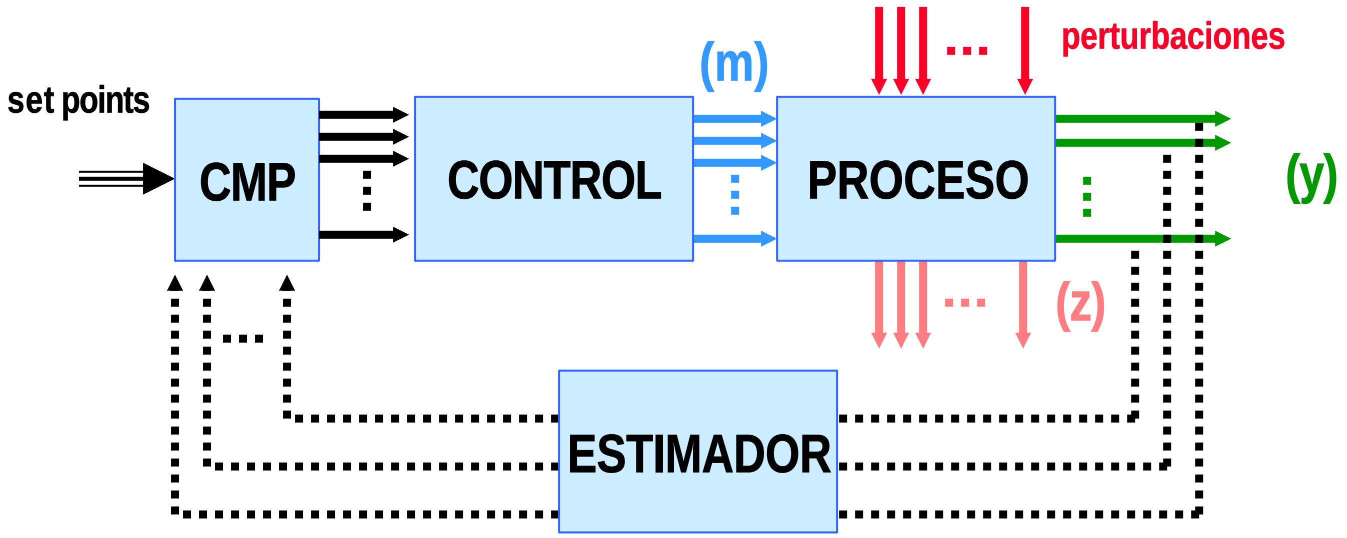




Clasificación de los Sistemas de Control

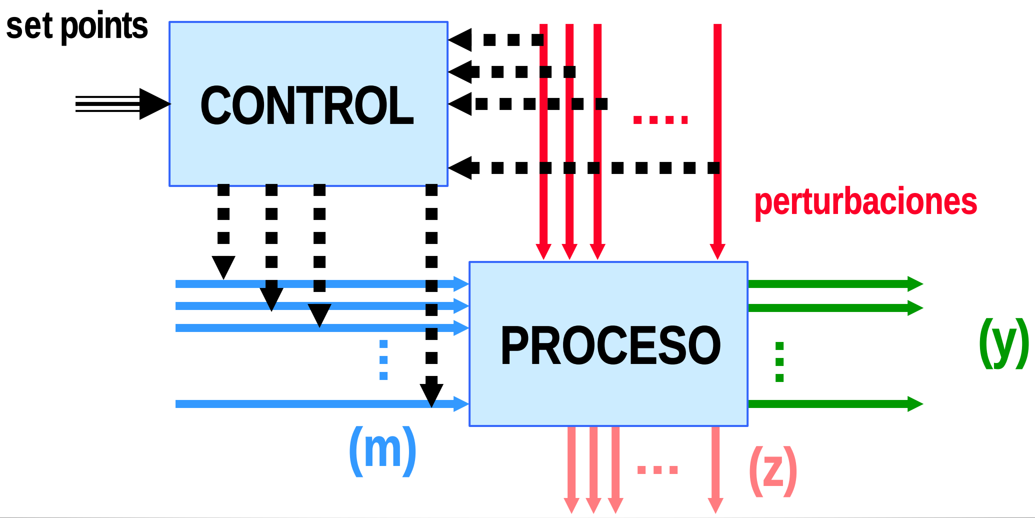
✓ *INFERENCIAL*

- la VC no puede medirse directamente, sino que se estima con un modelo matemático. Esta información se usa para ajustar la variable manipulada



✓ *AVANACCIÓN*

- la variable manipulada se ajusta en base a la medición de la perturbación. La VC no se ve afectada ya que no se genera error



Clasificación de los Sistemas de Control

- En función de la cantidad de salidas controladas y entradas manipuladas:
  - una entrada / una salida (SISO)
  - múltiples entradas / múltiples salidas (MIMO)
  - combinaciones de las anteriores
- En función del tipo de señales que se manejan:
  - de tiempo Continuo
    - señales analógicas, definidas continuamente para todo ***t***
  - de tiempo Discreto
    - señales digitales, definidas de a saltos para algunos instantes de ***t***
  - híbridos
    - se manejan ambos tipos de señales (son los más comunes)

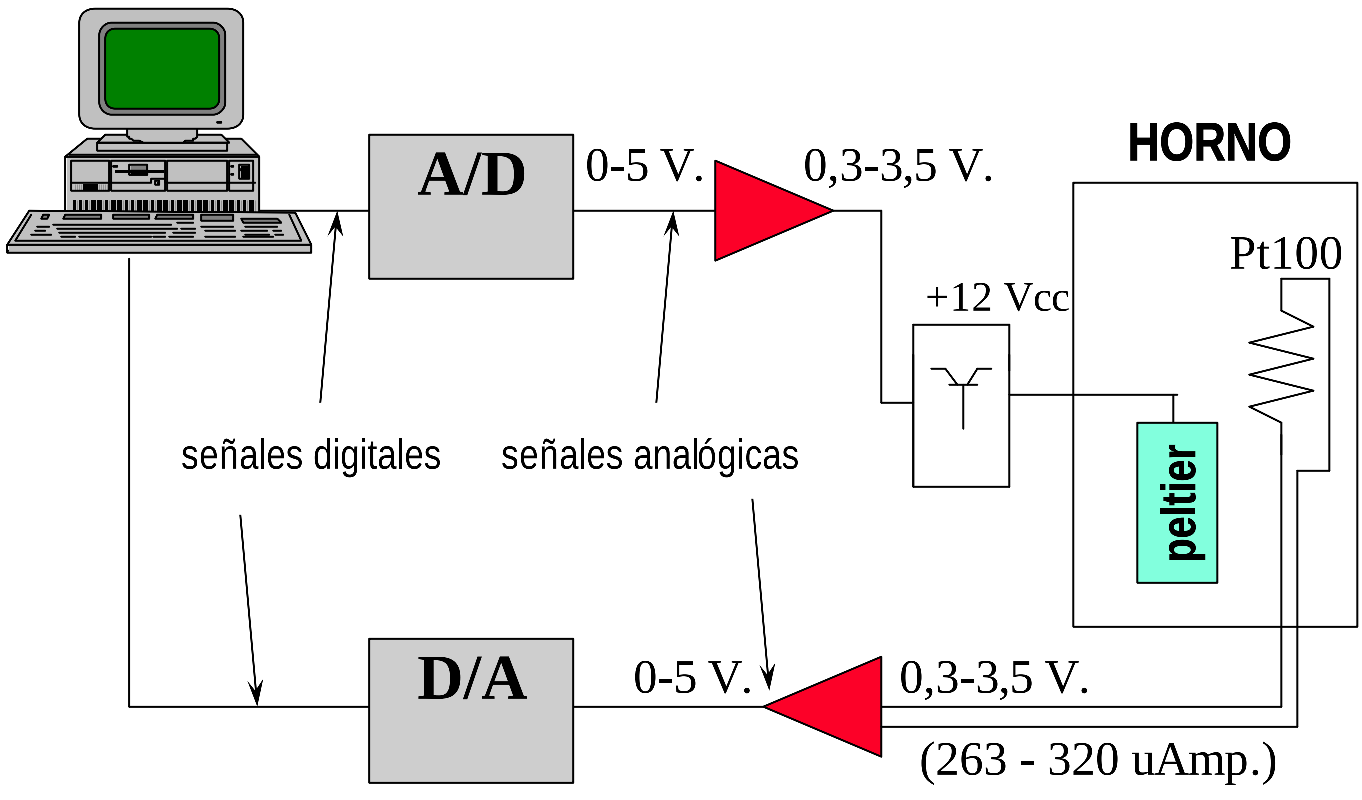
✓ *uso masivo del microprocesador en todos los niveles jerárquicos del proceso*

- Control digital directo (CDD)
- Supervisorio local
- Supervisorio global

Ejemplo 4

✓ *Control de Temperatura en un horno mediante PC (CDD):*

- Realimentación negativa de la VC
- Regulador y Servo
- SISO
- híbrido



Breve reseña histórica

- 1776: Revolución industrial

- Principios de siglo: integración de sensor y actuador (reguladores bimetálicos de Tª)

- ‘20: incorporación de controladores P y posteriormente PID
  - ✓ *ajuste empírico*
  - ✓ *interés en conocimiento del modelo*
  - ✓ *Reglas de Ziegler y Nichols*

- Postguerra: transferencia de tecnología desarrollada en secreto

Prof. Dr. Gerardo Acosta

Breve reseña histórica

- ‘50: fuerte desarrollo de la electrónica
  - *impacto sobre la instrumentación*
  - *normalización de algunas señales*
    - (4-20 mA)
  - *clara separación tanto en operación como en diseño de:*
    - la ley de control (ajuste individual de lazos PID)
    - secuenciamiento lógico (relés)
  - *objetivos más ambiciosos:*
    - migración de sistemas tipo SISO a tipo MIMO
    - conocimiento de la dinámica: auge de la Identificación de sistemas

- ‘60: desarrollo creciente de computadoras digitales
  - *supervisión de procesos de gran envergadura*
  - *explosión del control teórico (control moderno)*

Breve reseña histórica

- ‘70: VLSI permite microprocesadores y microcomputadoras de bajo costo y alta confiabilidad
  - ✓ *reemplazo de los sistemas analógicos por los digitales*
  - ✓ *menor separación entre instrumentación y control*
  - ✓ *diseño de esquemas de control asistido por computadora*

- ‘80: mayor tendencia a “distribuir” la actividad de cómputo
  - ✓ *control distribuido = mayor flexibilidad y tolerancia*
  - ✓ *creciente actividad en buses y redes*

Breve reseña histórica

- ‘90: gran impacto de la informática en las aplicaciones industriales del Control
  - *particularmente de la Inteligencia Artificial, también denominado “control inteligente”*
    - control experto
    - controladores difusos y con redes neuronales
    - control adaptativo y predictivo
- ’00: WEB
  - *control a través de Internet*
    - cada elemento del SS.CC. se transforma en un sitio web
    - expansión geográfica
    - sistemas SCADA con integración de información proveniente de distintas fuentes distantes
      - Producción
      - Gerencial
      - Mercado
      - Políticas Globales
    - protocolo TCP/IP y aparición del JAVA en aplicaciones industriales

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO I

- ✓ *Definir el control de procesos industriales*
- ✓ *Describir las necesidades e incentivos para controlar procesos industriales*
- ✓ *Analizar sus características para abordar diseños de los sistemas de control a emplear*
- ✓ *Obtener y emplear modelos matemáticos para resolver el problema de control*

Los sistemas lineales

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$\therefore\ a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

- aplicable el principio de superposición

✓ *si además es invariante en el tiempo*

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

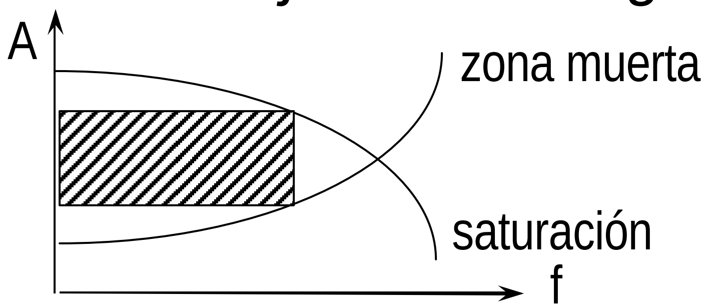
$$x(t-t) \rightarrow y(t-t)$$

- hablamos de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTIS)

✓ *el costo es una pérdida de generalidad ya que un SL en todo sentido no existe. Siempre aparecen no-linealidades:*

- zona muerta
- saturación
- histéresis
- cuantización

✓ *pero si se trabaja en una región...*



Los sistemas lineales

- ... es posible un simple modelo matemático con ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes

$$B_0 y(t) + B_1 \frac{dy}{dt} + \ldots + B_n \frac{d^n y}{dt^n} = A_0 x(t) + A_1 \frac{dx}{dt} + \ldots + A_m \frac{d^m x}{dt^m}$$

- la salida seguirá a la entrada, considerando las singularidades de la planta

$$x(t) = R \bullet e^{jwt}$$

$$y(t) = C \bullet e^{jwt}$$

- de este modo, la relación C/R dará información de la forma (dinámica) que ha de tener la respuesta para cualquier entrada:

$$B_0 C \bullet e^{jwt} + B_1 jwC \bullet e^{jwt} + \ldots = A_0 R \bullet e^{jwt} + A_1 jwR \bullet e^{jwt} + \ldots$$

$$\therefore \frac{C}{R} = \text{respuesta en frecuencia} = \frac{A_0 + A_1 jw + \ldots + A_m jw^m}{B_0 + B_1 jw + \ldots + B_n jw^n} = T(jw)$$

$$C \bullet e^{jwt} = T(jw) R \bullet e^{jwt}$$

- ¿qué sucede si en la referencia aplicamos un seno?

Los sistemas lineales

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_n(jw_n)e^{jnwt}$$

$$R_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x(t)e^{-jnwt}dt \text{ que es el coeficiente complejo de Fourier}$$

$$\therefore y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} T(jw_n)R_n e^{jnwt}$$

- *¿y si es un pulso?*

$$x(t) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} R_{(jw)}e^{jnwt}dw; \quad R_{(jw)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt = X(w)$$

$$\therefore y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{(jw)}R_{(jw)}e^{jwt}dw$$

- *algunas conclusiones:*
  - conociendo amplitud y fase de todas las componentes de una ***f(t)*** es posible describirla completamente en ***t***.
  - la respuesta en frecuencia proporciona toda la información necesaria para determinar la respuesta a cualquier excitación.

- falta exigir una condición a ***f(t)*:**

    - ✓ *de convergencia absoluta (que esté acotada)*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt < \infty}$$

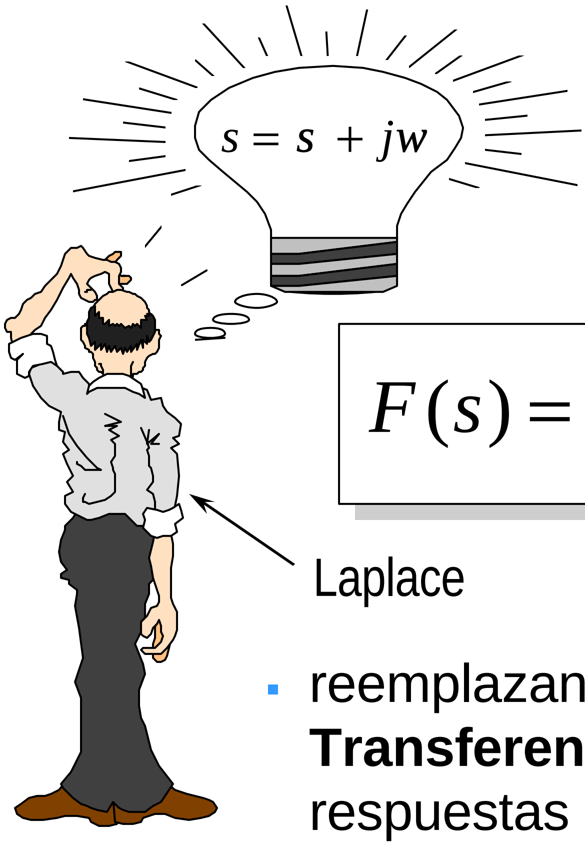
- ❑ de este modo, si están acotadas la función que modela la señal de entrada y la función que modela al sistema lineal, entonces estará acotada también la salida

ESENCIAL PARA EL CONTROL

Transformada de Laplace

✓ *solución:*

- factor de convergencia e^{-st} y restrinjo para t > 0



$$F(w) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}e^{-jwt}dt$$

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{f(t)\}}$$

- reemplazando ***T(jw)*** por ***T(s)*** **(Función de Transferencia)** encontramos las respuestas a las distintas entradas: con ***x(t) y T(jw)*** pasamos a ***X(s)*** y ***T(s)*** => ***Y(s)*** = ***T(s)X(s)***
- sin sentido físico pero con un arsenal de herramientas sencillas

✓ *aunque seguimos necesitando la solución temporal*

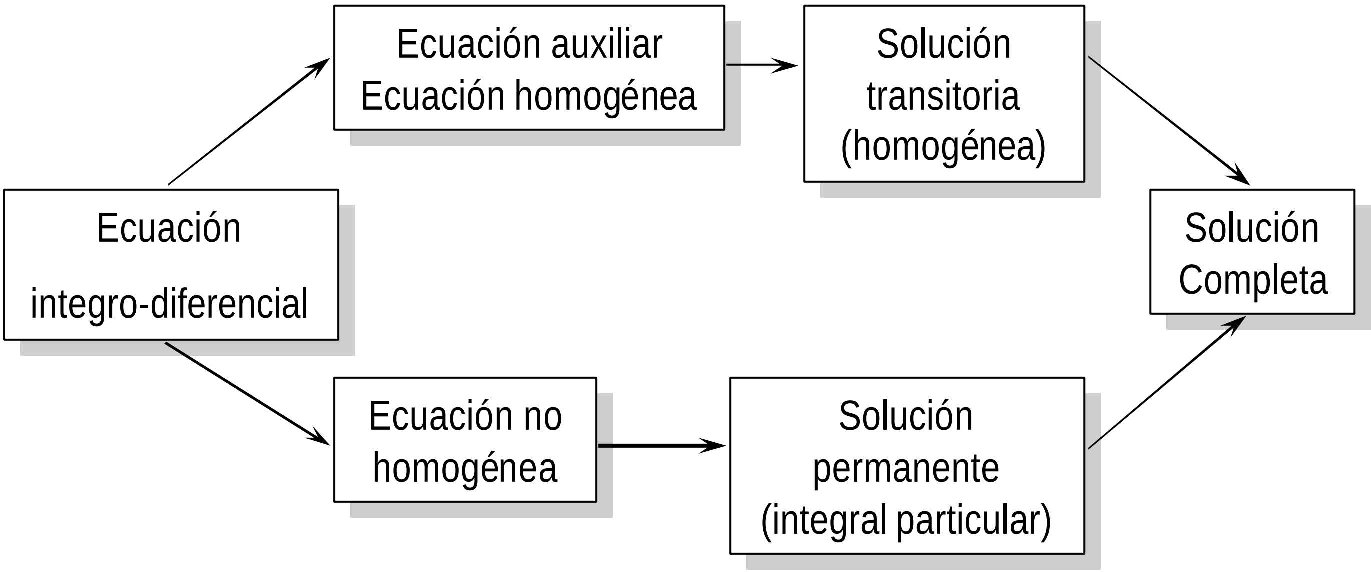
- antitransformada ($\mathcal{L}^{-1}\{.\}$)

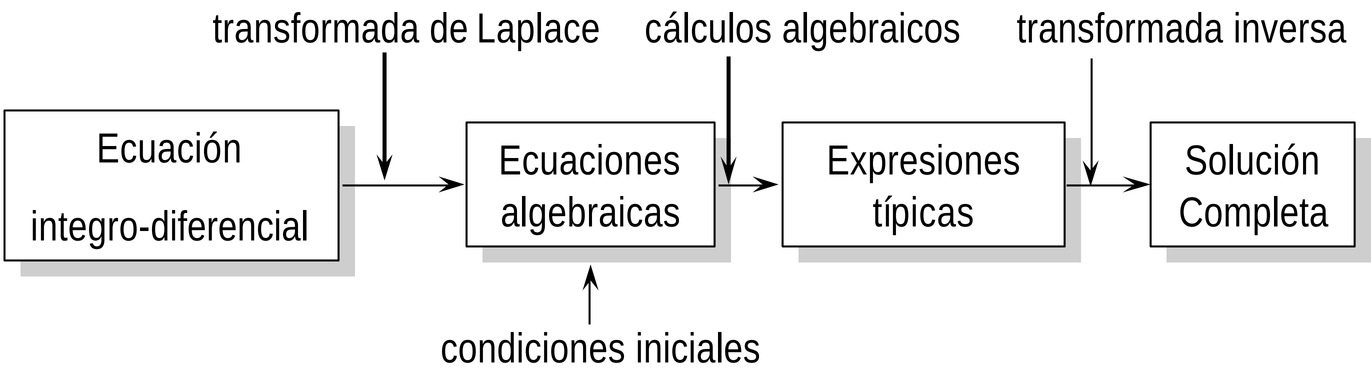
$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint R(s)T(s)e^{st}\,ds$$

$$y(t) = \sum \mathrm{Res}\left| Y(s)e^{st} \right|_{\text{polos } Y(s)}$$

ó tablas

✓ *esquemáticamente*





- existe otra manera de obtener la respuesta a partir de entrada y transferencia que está emparentada:

h(t) es la respuesta al impulso del sistema

$$\mathcal{L}^{-1}\{T(s)\} = h(t)$$

$$\boxed{\therefore\; y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t - t)x(t)dt}$$

Integral de Convolución

➢ Propiedades de la TL

✓ *Teorema de la Diferenciación real*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

- donde $f(0)$=valor inicial de $f(t)$ evaluada en $t=0$

✓ *Teorema de la Integración real*

$$\mathcal{L}\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} - \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

- donde $f^{-1}(0)$=integral de $f(t)$ evaluada en $t=0$

✓ *Teorema del Valor Inicial*

$$f(0^{+}) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

✓ *Teorema del Valor Final*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Función de Transferencia

- ✓ *Teorema del Retardo Puro*

$$\mathcal{L}\{f(t-t)u(t-t)\} = e^{-st}F(s)$$

  - donde $u(t-t)$ es el escalón unitario

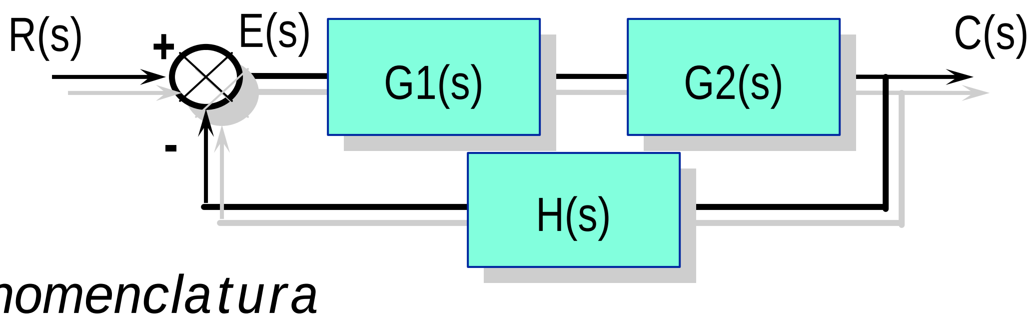
- ✓ *Integral de convolución*

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} h(t-t)x(t)dt\right\} = H(s)X(s)$$

- ➢ Definimos como FT a:

$$\boxed{T(s) = \left.\frac{\mathcal{L}\{salida\}}{\mathcal{L}\{entrada\}}\right|_{\substack{\text{condiciones}\\ \text{iniciales cero}}}}$$

- ✓ *para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo (LTIS) y SISO*
- ✓ *posibilita trabajar con bloques*

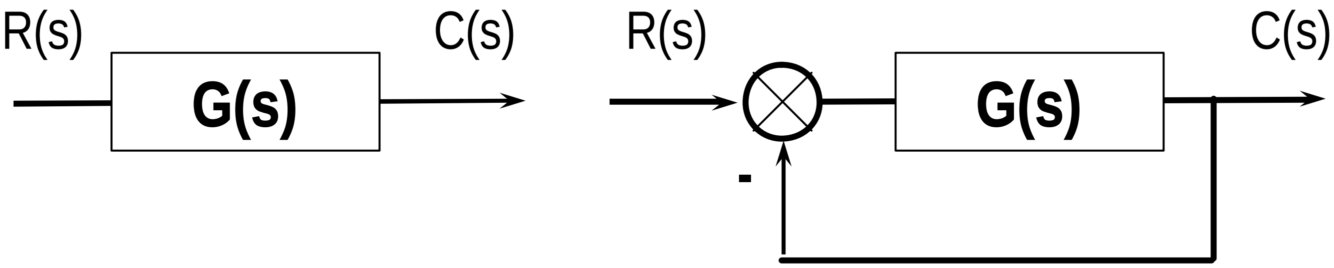


- ✓ *nomenclatura*
  - FT de lazo directo = $G(s) = G1(s)G2(s)$
  - FT de lazo inverso = $H(s)$
  - FT de lazo abierto = $G(s)H(s)$
  - FT de lazo cerrado = $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

Efectos de la realimentación

- Reducción de variaciones de parámetros y efecto de perturbaciones gracias a la RN

sean



si se produce una variación DG(s)/ |DG(s)|<<|G(s)|, se verá en la salida del siguiente modo:

✓ **L.A.:**

$$C(s)+\Delta C(s)=[G(s)+\Delta G(s)]R(s)$$

$$\Delta C(s)=\cancel{G(s)R(s)}+\Delta G(s)R(s)-\cancel{C(s)}$$

$$\therefore \Delta C(s)=\Delta G(s)R(s)$$

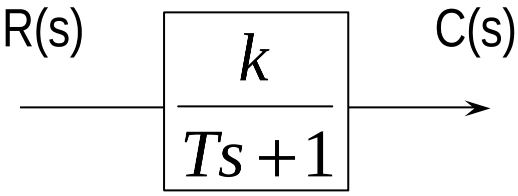
✓ **L.C.:**

$$C(s)+\Delta C(s)=\frac{G(s)+\Delta G(s)}{1+G(s)+\Delta G(s)}R(s)$$

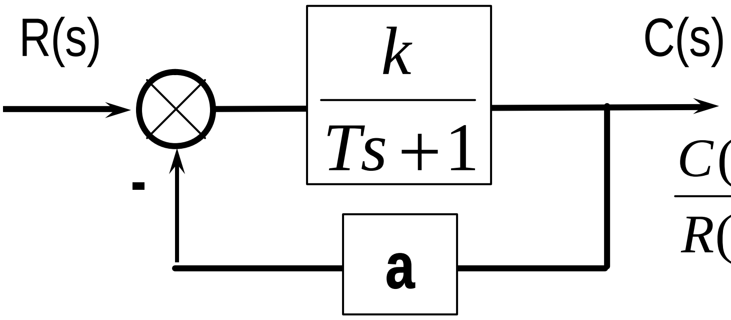
$$\Delta C(s)=\frac{G(s)R(s)}{1+G(s)+\Delta G(s)}+\frac{\Delta G(s)}{1+G(s)+\Delta G(s)}R(s)-C(s)$$

$$\therefore \Delta C(s)\cong\frac{\Delta G(s)}{1+G(s)+\Delta G(s)}R(s)$$

- Modificación de las constantes de tiempo



cte. de tiempo=T

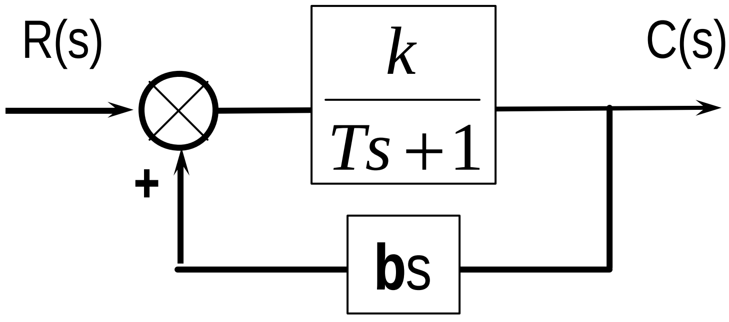


$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{k}{Ts+ak+1}=\frac{k/(1+ak)}{s\frac{T}{1+ak}+1}$$

$$cte.=\frac{T}{1+ak}$$

✓ *eliminación del integrador ideal*

- ¿y si la realimentación es positiva?



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{k}{(T-bk)s+1}$$

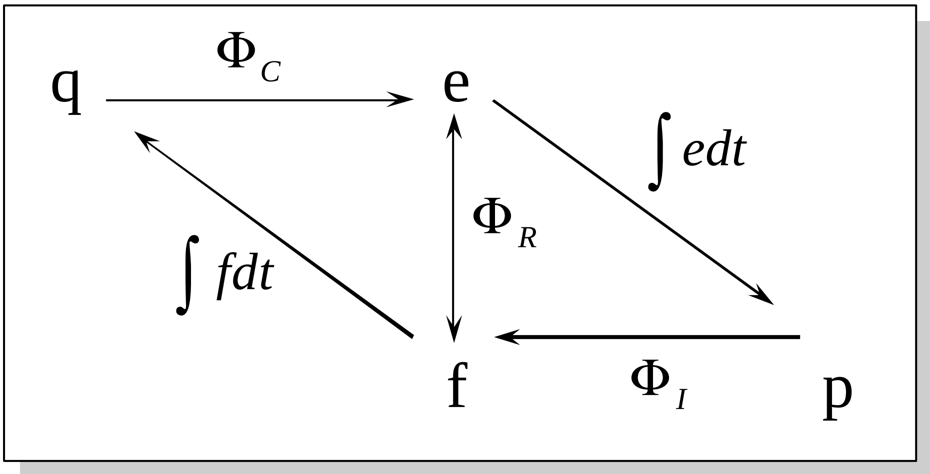
$$si \quad T=bk$$

✓ *se anula la cte. de tiempo*

✓ *potenciales inestabilidades*

Modelos Matemáticos para LTIS

- existen distintos modos de escribir la FT:
  - ✓ *cociente de polinomios en s* $G(s) = \dfrac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + ... + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0}$
  - ✓ *producto de polos y ceros* $G(s) = K\dfrac{\prod_{i=1}^{i=m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{j=n}(s+p_j)}$
  - ✓ *fracciones parciales* $G(s) = k(s) + \sum_{i=1}^{i=n}\dfrac{r(i)}{s+p_i}$
- **Analogía entre sistemas energéticos:**



Tetraedro de Paynter

- e: esfuerzo (tensión, presión, fuerza)
- f: flujo (corriente, caudal, velocidad)
- Φ_C: capacitancia generalizada
- Φ_I: inductancia generalizada
- Φ_R: resistencia o disipación

$\left.\begin{array}{l}\Phi_C\\ \Phi_I\\ \Phi_R\end{array}\right\}$ relaciones estáticas

Analogías entre sistemas

Elementos Capacitivos

$$\boxed{e = \Phi_C(q) \text{ donde } q = \int f dt}$$

- para un depósito de líquido

$$h(t) = H_0 + \frac{1}{A}\int_0^t q(t)dt$$

- para un capacitor

$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

Elementos Inductivos

$$\boxed{f = \Phi_I(p) \text{ donde } p = \int e dt}$$

- para una inductancia

$$i(t) = I_0 + \frac{1}{I}\int_0^t v(t)dt$$

- para una masa que se desplaza

$$\mathrm{v(t)} = \mathrm{V}_0 + \frac{1}{\mathrm{m}}\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{f(t)}dt$$

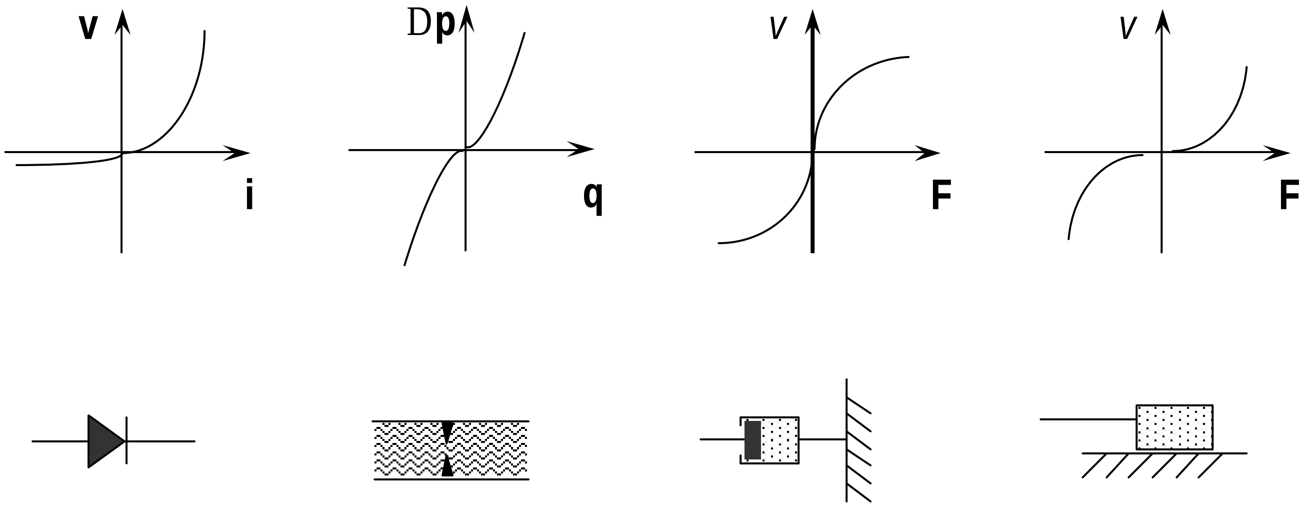
Elementos Resistivos

$$\boxed{e = \Phi_R(f)}$$

- para una resistencia (Ohm)

$$v = iR$$

- algunas resistencias no lineales

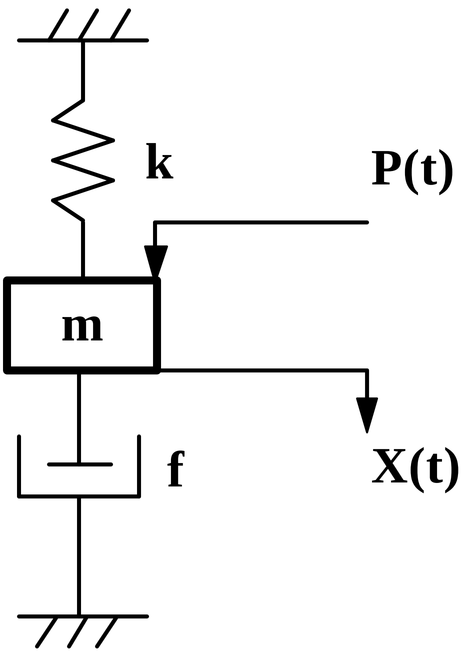


Analogías entre sistemas

✓ *analizar*

- causalidad
- conservación de la energía
- potencia = **e**x**f** = energía/tiempo
- energía almacenada = $\Delta E = \int e(t)\, f(t)dt$
- polos y ceros de transferencia

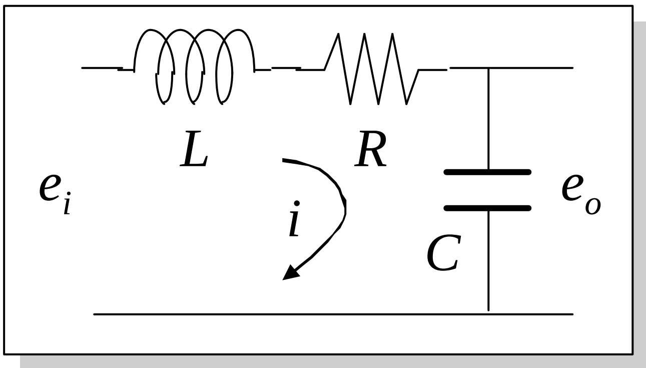
➢ Ejemplo de sistema mecánico (2ª ley de Newton)



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = p(t)$$

Ejemplos de Modelos Matemáticos

- Ejemplo de sistema eléctrico (leyes de Kirchhoff)



$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=e_i$$

$$\frac{1}{C}\int idt=e_0$$

en el dominio de Laplace:

$$LsI(s)+RI(s)+\frac{1}{C}\frac{I(s)}{s}=E_i(s)$$

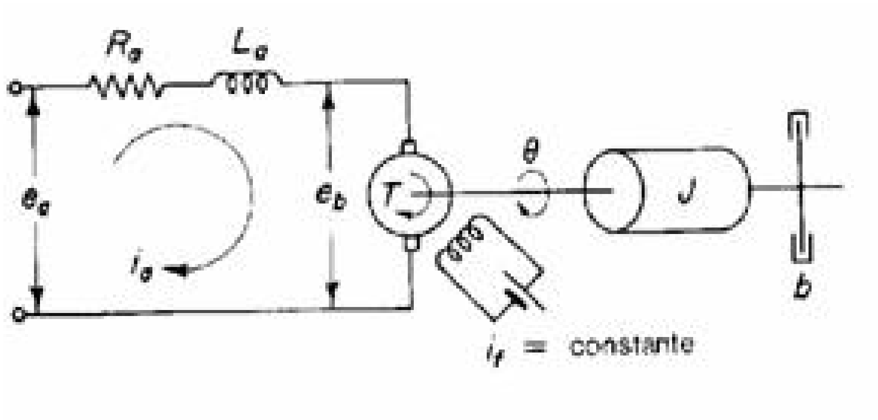
$$\frac{1}{C}\frac{I(s)}{s}=E_0(s)$$

y la función de transferencia: $\dfrac{E_0(s)}{E_i(s)}=\dfrac{1}{LCs^2+RCs+1}$

Ejemplo de sistema electromecánico

- (combinación de los anteriores)

✓ *CONTROL por ARMADURA de MOTOR de CC*



torque :

$$T = y K_1 i_a$$

$$T = K_f i_f K_1 i_a$$

$$T = K i_a$$

fcem inducida:

$$e_b = K_b \frac{dq}{dt}$$

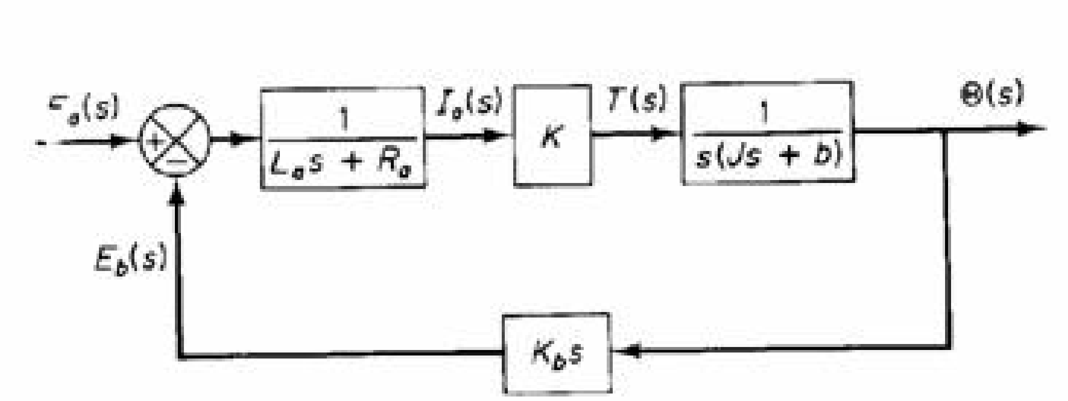
circuito de armadura:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

rotor:

$$J \frac{d^2 q}{dt^2} + b \frac{dq}{dt} = T = K i_a$$

R_a = resistencia de armadura
L_a = inductancia de armadura
i_a = corriente de armadura
i_f = corriente de campo
e_a = tensión aplicada en armadura
e_b = fcem
q = desplazamiento angular del eje
T = par desarrollado por el motor
J = momento inercia masa rotante
b = coeficiente de fricción viscosa



pasando al dominio de Laplace :

$$E_b(s) = K_b s\Theta(s)$$

$$((L_a s + R_a)I_a(s) + E_b(s) = E_a(s)$$

$$(Js^2 + bs)\Theta(s) = T(s) = KI_a(s)$$

la función de transferencia queda:

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s\left[L_a Js^2 + (L_a b + R_a J)s + R_a b + KK_b\right]}$$

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

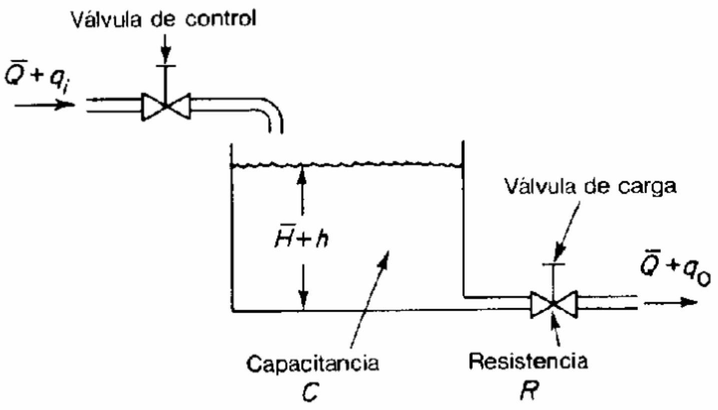
$$E_a(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K_m}{s(T_m s+1)}} \longrightarrow \Theta(s)$$

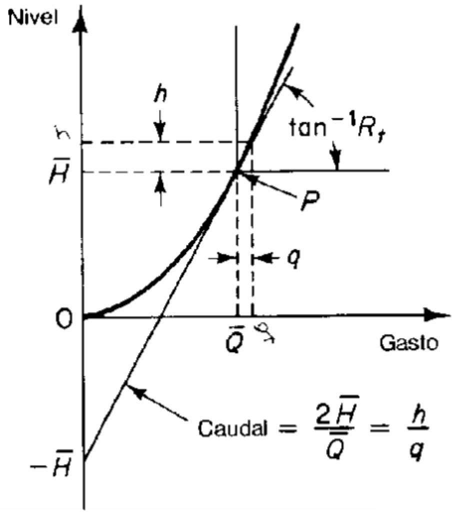
donde :

$$K_m = K/(R_a b + KK_a)$$

$$T_m = R_a J/(R_a b + KK_b)$$

Ejemplo de sistema hidráulico





$$Cdh = (q_i - q_o)dt$$

$$q_o = \frac{h}{R}$$

Q = caudal en estado estacionario
q_i = variación caudal de entrada
q_o = variación caudal de salida
H = nivel en estado estacionario
h = variación del nivel

la ecuación diferencial del sistema es :

$$RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i$$

transformando al plano s :

$$(RCs+1)H(s) = RQ_i(s)$$

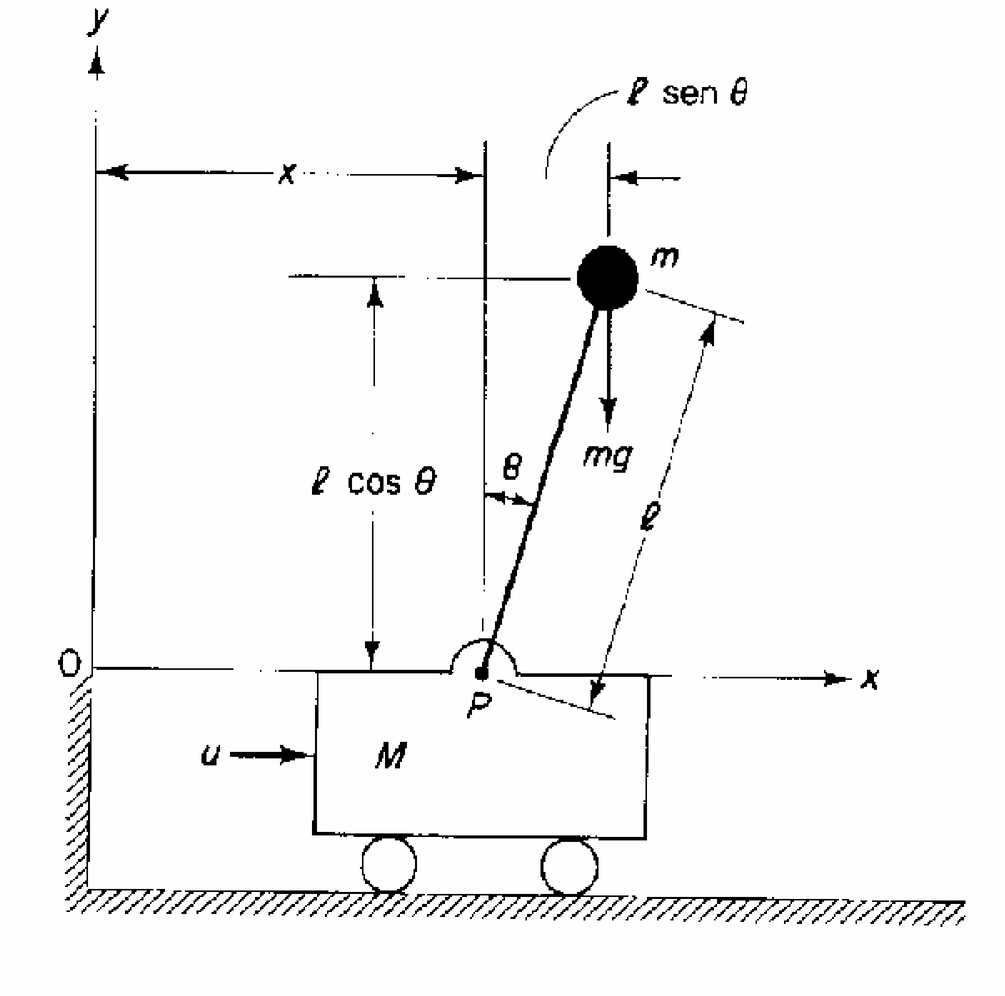
y la función de transferencia :

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs+1}$$

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

Linealizar un sistema no lineal

- Ejemplo de sistema mecánico (2ª ley de Newton)



✓ *Causalidad*

- Causa = fuerza $\boldsymbol{u}$
- Efecto = movimiento de $\boldsymbol{m}$

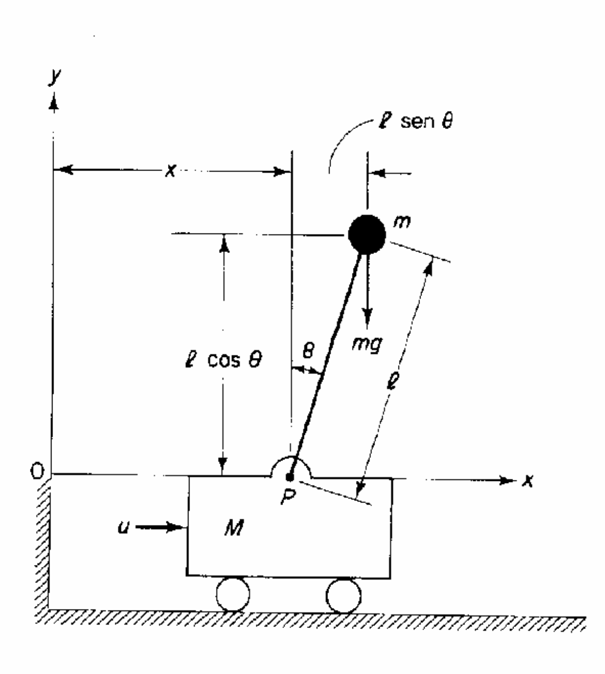
✓ *Conservación de la energía*

- Disipación mínima por rozamiento

✓ *Energía almacenada*

- En las masas que se desplazan

Linealizar un sistema no lineal



$$x_G = x + l\sin q$$

$$y_G = l\cos q$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin q) = u$$

pero como $\dfrac{d}{dt}\sin q = (\cos q)\dot{q}$

y $\dfrac{d^2}{dt^2}\sin q = -(\sin q)\dot{q}^2 + (\cos q)\ddot{q}$

podemos reescribir $(M+m)\ddot{x} - ml(\sin q)\dot{q}^2 + ml(\cos q)\ddot{q} = u$

en la dirección y **considerar la rotación alrededor de** P **:**

Linealizar un sistema no lineal

$$m\frac{d^2x_G}{dt^2}l\cos q - m\frac{d^2y_G}{dt^2}l\sin q = mgl\sin q$$

$$\left[m\frac{d^2}{dt^2}(x+l\sin q)\right]l\cos q - \left[m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos q)\right]l\sin q = mgl\sin q$$

$$m\ddot{x}\cos q + ml\ddot{q} = mg\sin q$$

linealizamos suponiendo $q(t)$ **y** $\dot{q}(t)$ **pequeños :**

$$\sin q \cong q\,,\ \cos q \cong 1 \ \mathbf{y}\ q\dot{q}^2 \cong 0$$

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{q} = u$$

$$m\ddot{x} + ml\ddot{q} = mgq$$

y pasamos al dominio de Laplace :

$$(M+m)s^2x + mls^2q = u$$

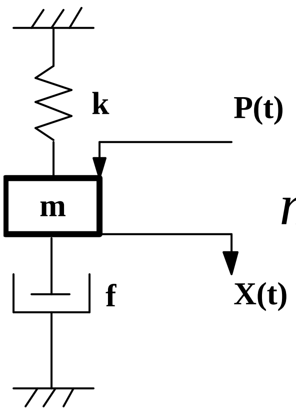
$$ms^2x + mls^2q = mgq$$

eliminando x

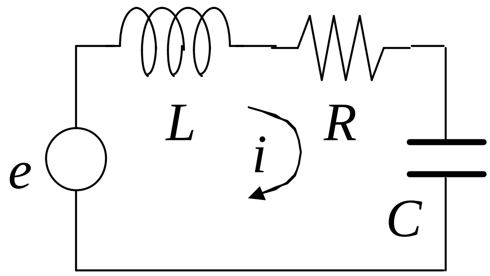
$$\frac{u - mls^2q}{M+m} = gq - ls^2q$$

$$\therefore G(s) = \frac{q}{u} = \frac{1}{(M+m)g - Mls^2}$$

- Ej. de sistemas análogos:



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = p(t)$$



$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = e(t)$$

Sistema Mecánico	Sistema Eléctrico
Fuerza (p) o Par (T)	Voltaje (e)
Masa (m) o Momento de Inercia (J)	Inductancia (L)
Coeficiente de fricción viscosa (f)	Resistencia (R)
Constante del Resorte (k)	Inverso de Capacitancia (1/C)
Desplazamiento (x) o angular (Θ)	Carga (q)
Velocidad dx/td o dΘ/dt	Corriente (i)

Dominio de los diferentes modelos

Tiempo Continuo	Tiempo Discreto
$Y(s) = H(s)X(s)$	$Y(z) = H(z)X(z)$

Formato de FT

Tiempo Continuo:

- Fracciones Parciales
- Polinomios
- Polos y Ceros Factorizados

Tiempo Discreto:

- Fracciones Parciales
- Polinomios
- Polos y Ceros Factorizados

Formato de EE

Tiempo Continuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Tiempo Discreto:

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$
$$y_n = Cx_n + Du_n$$