# Sistemas de Control

*apuntes capítulo II (análisis temporal y software)*

**Facultad de Ingeniería - UNCPBA**

**Dto. de Ingeniería Electromecánica**

**Prof: Dr. Gerardo Acosta**

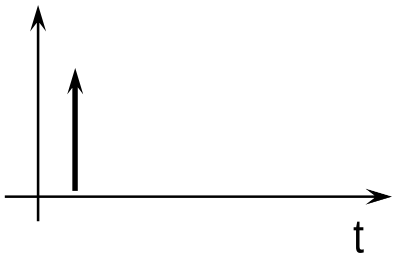
## ➢ OBJETIVOS DEL CAPÍTULO II

- ✓ *Especificaciones de los sistemas de control*
- ✓ *Análisis de la respuesta temporal*
- ✓ *Error de estado estacionario*
- ✓ *Índices de desempeño*
- ✓ *Introducción al Matlab*

# Especificaciones

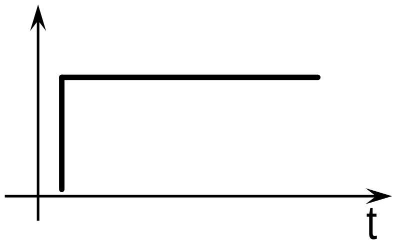
- Dinámicas
  - ✓ *Forma de respuesta en el tiempo (patrón)*
  - ✓ *Vinculadas a:*
    - ❑ estabilidad
    - ❑ velocidad de respuesta
- Estáticas
  - ✓ *Precisión - error de estado estacionario*
- Señales de prueba más comunes
  - ✓ *impulso*

$$d(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t_0 \to 0} \dfrac{A}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t < 0 \wedge t > t_0 \end{cases} \xrightarrow{T.L} 1$$



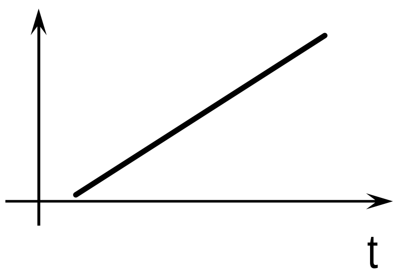

  - ✓ *escalón*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \xrightarrow{T.L} \frac{1}{s}$$



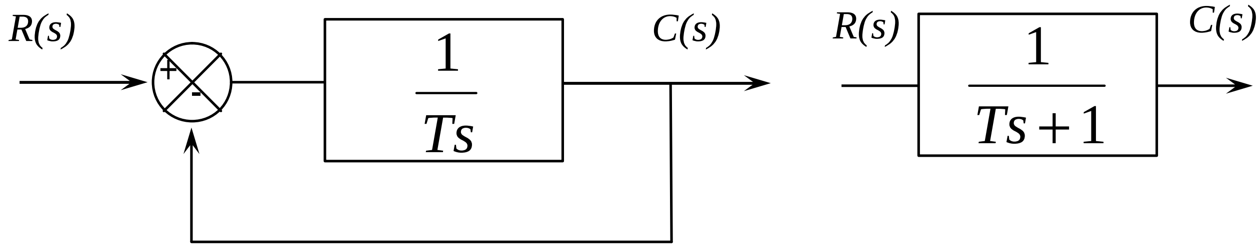

  - ✓ *rampa*

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \text{ o } tu(t) \xrightarrow{T.L} \frac{1}{s^2}$$

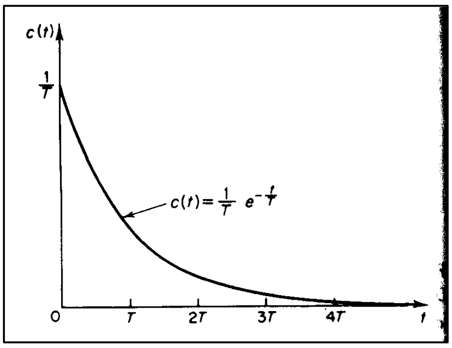


# Especificaciones dinámicas: Sistemas de 1er orden

✓ *1 elemento almacenador de energía*




## ➢ Respuesta al impulso:

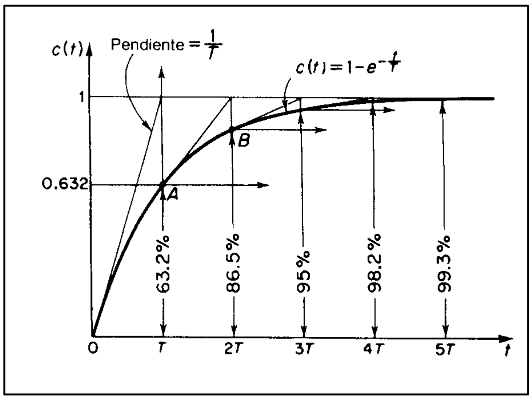



$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

y antitransformando:

$$c(t)=\frac{1}{T}e^{-t/T}\ (t\geq 0)$$

## ➢ Respuesta a u(t):

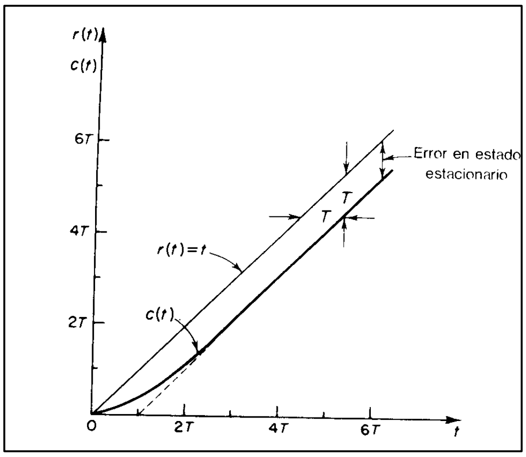



$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}$$

y antitransformando:

$$c(t)=1-e^{-t/T}\ (t\geq 0)$$

## ➢ Respuesta a la rampa:




$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T^2}{Ts+1}$$

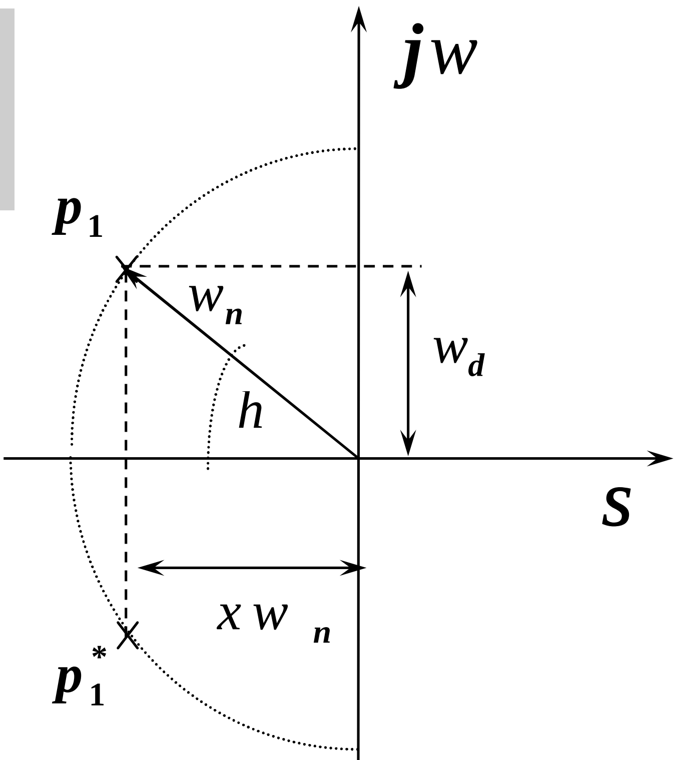
y antitransformando:

$$c(t)=t-T+Te^{-t/T}\ (t\geq 0)$$

# Especificaciones dinámicas: Sistemas de 2º orden

✓ *2 elementos almacenadores de energía*

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{C(s)}}{\boldsymbol{R(s)}} = \frac{\boldsymbol{w_n^2}}{\boldsymbol{s^2 + 2xw_n s + w_n^2}}}$$




$$x = \cos h$$

$$p_1 - p_1^* = -xw_n \pm jw_n\sqrt{1-x^2}$$

*frecuencia natural o propia no amortiguada:* $w_n$

*relación o coeficiente de amortiguamiento:* $x$

*amortiguamiento real:* $w_n x$

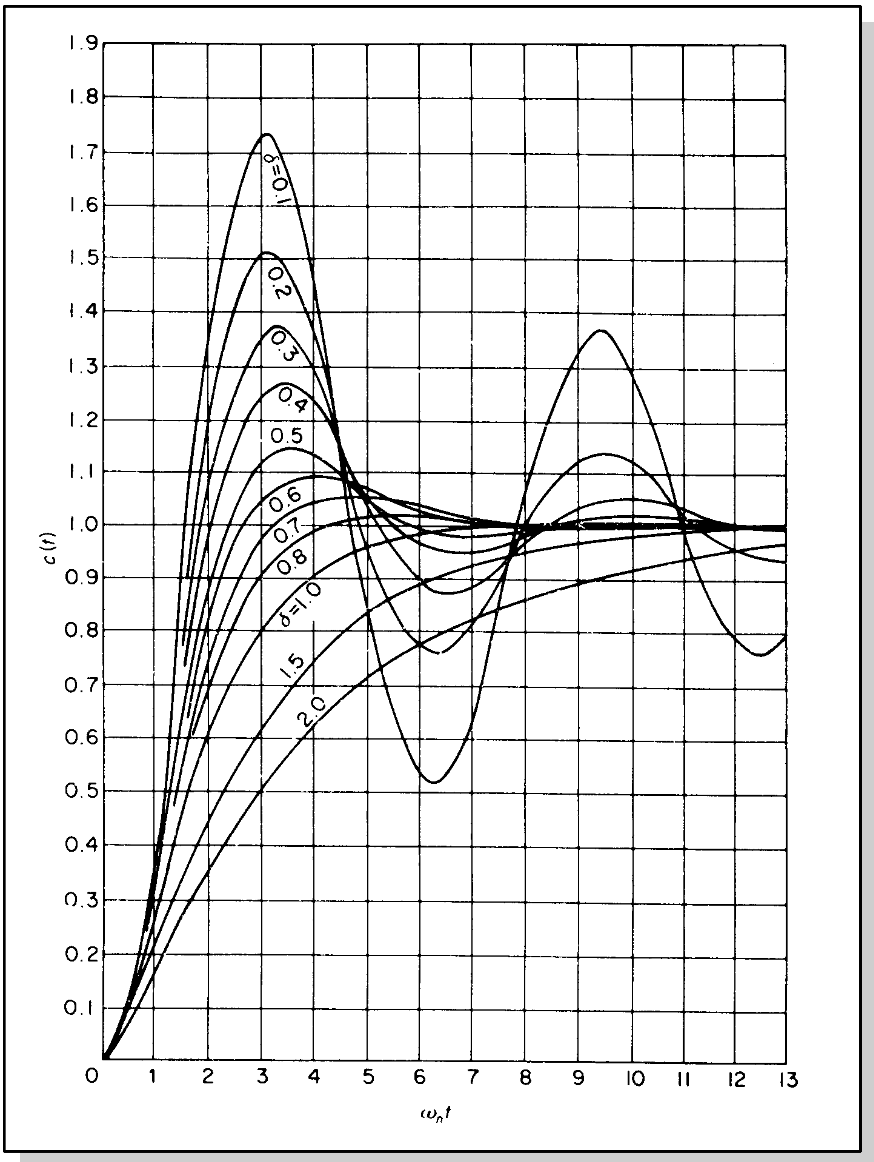
*frecuencia amortiguada:* $w_d = w_n\sqrt{1 - x}$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{w_n^2}{s^2 + 2xw_n s + w_n^2}\right]\frac{1}{s}$$

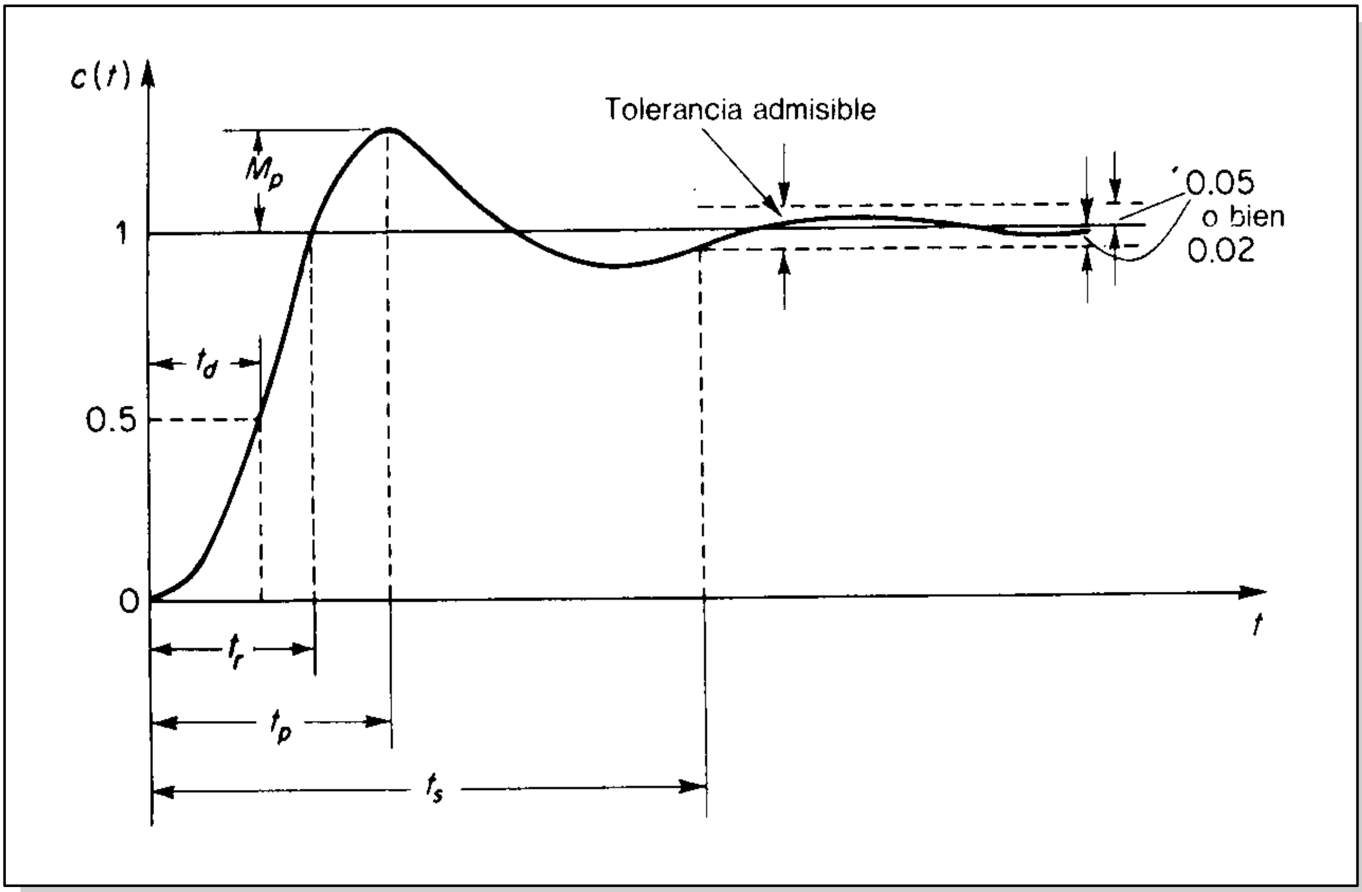
**para una entrada escalón unitario**

$$\therefore c(t) = 1 - \frac{e^{-xw_n t}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{sen}\left[w_d t + \mathrm{tg}^{-1}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]$$

para t ≥ 0



# Sistemas de 2º orden




- parámetros de la respuesta:

  *Dom f:* ***BW, A, ...***

  *Dom t:* $\boldsymbol{t_p}$***,*** $\boldsymbol{M_p}$***,*** $\boldsymbol{t_s}$***, ...***

  $\boldsymbol{t_d}$ ***: tiempo de retardo (delay)***

  $\boldsymbol{t_r}$ ***: tiempo de crecimiento (rise)***

  $\boldsymbol{t_p}$***: tiempo de pico (peak)***

  $\boldsymbol{M_p}$ ***: máx. sobrepico (overshoot)***

  $\boldsymbol{t_s}$***: tiempo de establecimiento (set)***

# Sistemas de 2º orden

- relación parámetros-modelo:
  - ✓ *derivando*

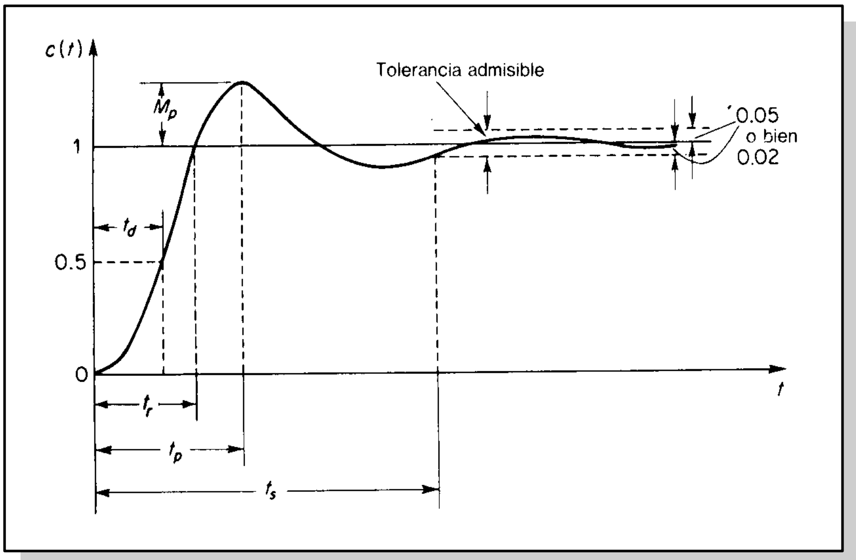
$$\boxed{t_p = \frac{p}{w_d}}$$

  - ✓ *con* $\boldsymbol{t_p}$

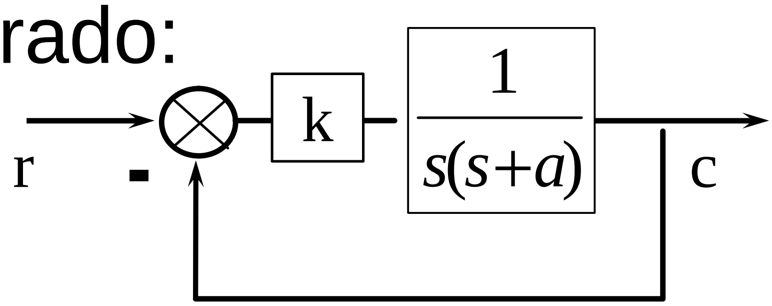
$$\boxed{M_{p\%} = 100\, e^{-(x/\sqrt{1-x^2})p}}$$

  - ✓ *envolventes de 1er orden*

$$\boxed{t_{s2\%} = \frac{4}{xw_n} \text{ ó } t_{s5\%} = \frac{3}{xw_n}}$$

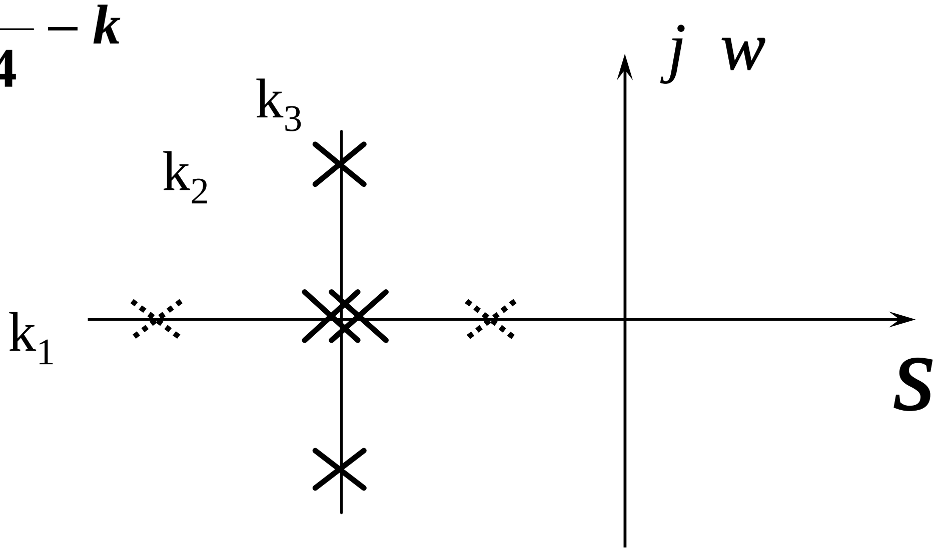


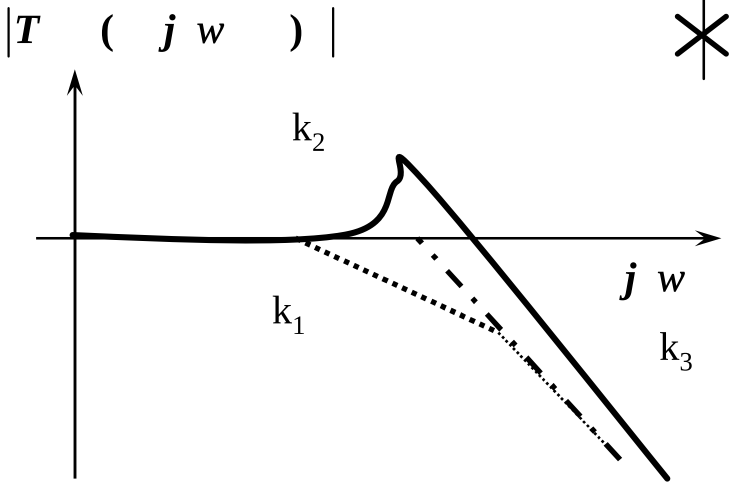
- En un lazo cerrado:




$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{k}{s(s+a)}}{1+\dfrac{k}{s(s+a)}}=\frac{k}{s^2+as+k}$$

$$p_{1-2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-k}$$




$k_1 < k_2 < k_3$

- Consideremos el sistema dado por la FT siguiente:

$$M(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{i=m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{j=n}(s+p_j)}$$

  - ✓ *para los sistemas realizables, los polos y ceros serán números reales o pares de números complejos conjugados*

$$M(s)=K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{\prod_{i=1}^{i=k}(s+\sigma_i)\prod_{j=1}^{j=q}(s^2+2\alpha_j s+w_{nj}^2)}$$

$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R(s)M(s)]$ *para entrada escalón:*

$$c(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\prod_{j=1}^{j=m}(s+z_j)}{s\prod_{i=1}^{i=k}(s+\sigma_i)\prod_{j=1}^{j=q}(s^2+2\alpha_j s+w_{nj}^2)}\right]$$

$$c(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s}+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{B_i}{(s+\sigma_i)}+\sum_{j=1}^{j=q}\frac{C_j s+D_j}{s^2+2\alpha_j s+w_{nj}^2}\right]$$

**donde $A$, $B$, $C$, y $D$ dependen de los polos y ceros de $M(s)$.**

$$\therefore \boxed{c(t)=Au(t)+\sum_{i=1}^{i=k}B_i e^{-\sigma_i t}+\sum_{j=1}^{j=q}D_j E_j e^{-\alpha_j t}\sin\left(\sqrt{w_{nj}^2-\alpha_j^2}\,t+\phi_j\right)}$$

**siendo**

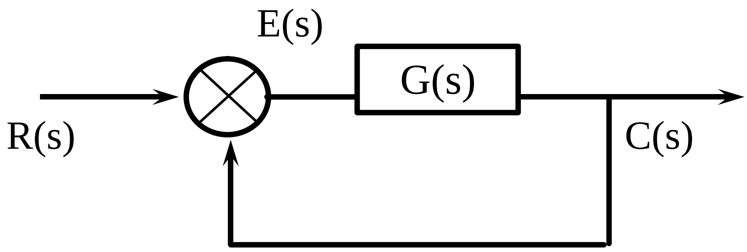
$$\phi_j=tg^{-1}\frac{C\sqrt{w_{nj}^2-\alpha_j^2}}{1-C\alpha_j} \quad \textbf{y} \quad E_j=\sqrt{\frac{1-2C\alpha_j+C^2w_{nj}^2}{w_{nj}^2-\alpha_j^2}}$$

# ➢ OBJETIVOS DEL CAPÍTULO II

- ✓*Especificaciones de los sistemas de control*
- ✓*Análisis de la respuesta temporal*
- ✓*Error de estado estacionario*
- ✓*Índices de desempeño*
- ✓*Introducción al Matlab*

# Especificaciones Estáticas

- de exactitud




$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s)\left[1 - \frac{G(s)}{1+G(s)}\right]$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$ → transferencia de LA

$$G(s) = \frac{(1+a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_m s^m)}{(1+b_1 s + ... + b_n s^n)s^q} k; \mathrm{n} + \mathrm{q} \geq \mathrm{m}$$

- ✓ *los polos en el origen influyen decisivamente en el error y determinan el **tipo de sistema**:*

  -tipo 0: q=0

  -tipo 1: q=1

  .....

- ✓ *una vez determinado el tipo de sistema por inspección, se determinan las constantes de error y se calcula el error en régimen permanente a partir de estas constantes de acuerdo a la forma de la señal de entrada.*

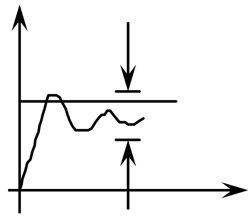
# Especificaciones estáticas

- régimen permanente:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \quad \text{Teorema del Valor Final}$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)} = \frac{s^q(1+b_1 s+\ldots+b_n s^n)R(s)}{s^q(1+b_1 s+\ldots+b_n s^n)+(1+a_1 s+\ldots+a_m s^m)k} = \frac{s^q(P1)R(s)}{s^q(P1)+(P2)k}$$

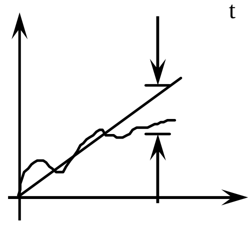
- Sistemas TIPO 0:
  - *entrada escalón:*



t

$$\frac{R_0}{s} \therefore E_{ee} = \lim_{s\to 0} \frac{\$(P1)}{(P1)+(P2)k_q}\frac{R_0}{\$} = \frac{R_0}{1+k_q}$$

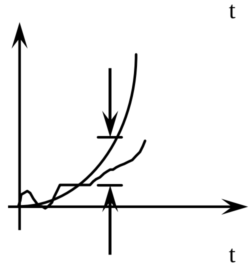
  - *entrada rampa:*



t

$$\frac{R_1}{s^2} \therefore E_{ee} = \lim_{s\to 0} \frac{\$(P1)}{(P1)+(P2)k_q}\frac{R_1}{\$^2 s} \to \infty$$

  - *entrada parabólica:*



t

$$\frac{R_2}{s^3} \therefore E_{ee} = \lim_{s\to 0} \frac{\$(P1)}{(P1)+(P2)k_q}\frac{R_2}{\$^3 s^2} \to \infty$$

- Sistemas TIPO 1:
  - *entrada escalón:*

$$\frac{R_0}{s} \therefore E_{ee} = \lim_{s\to 0} \frac{\$^2(P1)}{s(P1)+(P2)k_q}\frac{R_0}{\$} = 0$$

  - *entrada rampa:*

$$\frac{R_1}{s^2} \therefore E_{ee} = \lim_{s\to 0} \frac{\$^2(P1)}{s(P1)+(P2)k_q}\frac{R_1}{\$^2} = \frac{R_1}{k_q} = cte.$$

..........................

# Coeficientes de error

$$k_e = \frac{\textit{salida en estado estacionario}}{\textit{error de estado estacionario}}$$

- ✓ *de posición (entradas escalón)*
- ✓ *de velocidad (entradas rampa)*
- ✓ *de aceleración (entradas parabólicas)*

➢ Coeficiente de error de posición:

$$k_p = \frac{C(\infty)}{E(\infty)} = \frac{\lim\limits_{s\to 0} s \dfrac{G(s)}{1+G(s)} \dfrac{R_0}{s}}{\lim\limits_{s\to 0} s \dfrac{1}{1+G(s)} \dfrac{R_0}{s}} = \lim_{s\to 0} G(s) \therefore \text{ para sistemas tipo } \begin{cases} 0 \to \mathrm{k_p} = k \\ 1 \to \mathrm{k_p} = \infty \\ 2 \to \mathrm{k_p} = \infty \end{cases}$$

➢ Coeficiente de error de velocidad:

$$k_v = \frac{\dot{C}(\infty)}{E(\infty)} = \frac{\lim\limits_{s\to 0} s \dfrac{sG(s)}{1+G(s)} \dfrac{R_0}{s}}{\lim\limits_{s\to 0} s \dfrac{1}{1+G(s)} \dfrac{R_0}{s}} = \lim_{s\to 0} sG(s) \therefore \text{ para sistemas tipo } \begin{cases} 0 \to \mathrm{k_v} = 0 \\ 1 \to \mathrm{k_v} = cte. \\ 2 \to \mathrm{k_v} = \infty \end{cases}$$

➢ Coeficiente de error de aceleración:

$$k_a = \frac{\ddot{C}(\infty)}{E(\infty)} = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

➢ OBJETIVOS DEL CAPÍTULO II

✓ *Especificaciones de los sistemas de control*

✓ *Análisis de la respuesta temporal*

✓ *Error de estado estacionario*

✓ *Índices de desempeño*

✓ *Introducción al Matlab*

# Índices de Calidad

✓ *En resumen:*

| TIPO | ERROR DE POSICIÓN | ERROR DE VELOCIDAD | ERROR DE ACELERAC. |
|---|---|---|---|
| **0** | $R_0/(1+k_p)$ | ¥ | ¥ |
| **1** | **0** | $R_1/k_v$ | ¥ |
| **2** | **0** | **0** | $R_2/k_a$ |
| **3** | **0** | **0** | **0** |

## ➢ Índices de Calidad:

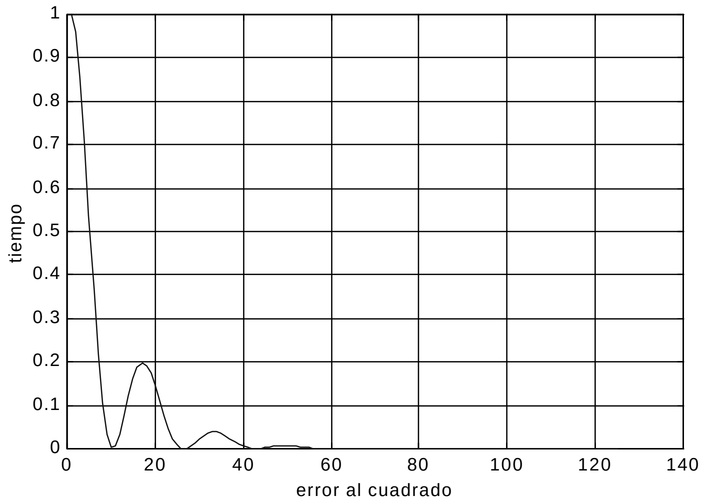
- ✓ *posibilitar la evaluación de los SS.CC. respecto a un criterio representado matemáticamente*
  - control óptimo
- ✓ *requerimientos:*
  - ❑ selectividad
  - ❑ valor numérico único
  - ❑ calculable analíticamente
  - ❑ función de los parámetros del sistema
- ✓ *en general:*

$$\boxed{I = \int_0^{\infty} f\,(e(t), r(t), c(t), u(t), t)\,dt}$$

## ➢ Integral Square Error

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t)dt$$

- ✓ *da + importancia a los errores grandes*
  - ❑ por el cuadrado
- ✓ *son sistemas rápidos pero de estabilidad relativa pobre*
- ✓ *de mucha utilidad práctica pues tienden a disminuir el consumo de potencia*
- ✓ *poca selectividad*




$$\int_0^{\infty} e^2(t)dt \cong \int_0^{T} e^2(t)dt$$

si $e \to 0$ para $t > T$

## ➢ Integral Absolute Error

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

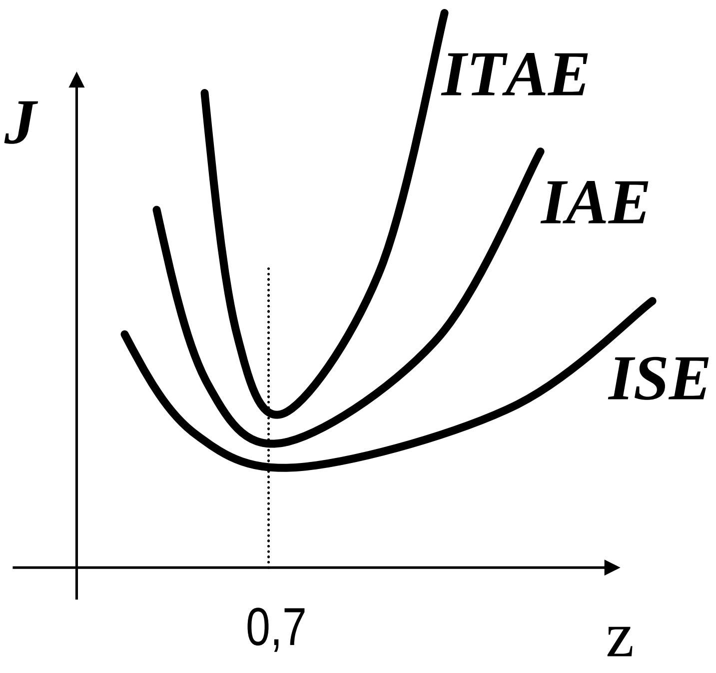
- ✓ *de fácil aplicación*
- ✓ *selectividad intermedia*

## ➢ Integral Time Absolute Error

$$\boxed{ITAE = \int_0^{\infty} t\,|e(t)|\,dt}$$

- ✓ *grandes errores iniciales con poco peso (t bajo)*
- ✓ *se penalizan errores futuros*
- ✓ *sistemas con poco sobrepico y oscilaciones amortiguadas*
- ✓ *buena selectividad*
- ✓ *para un 2º orden*

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2xs + 1}$$



## ➢ OBJETIVOS DEL CAPÍTULO II

- ✓ *Especificaciones de los sistemas de control*
- ✓ *Análisis de la respuesta temporal*
- ✓ *Error de estado estacionario*
- ✓ *Índices de desempeño*
- ✓ *Introducción al Matlab*

# Definiciones básicas

- ¿Qué es Matlab?
  - ✓ *un entorno de programación/simulación*
  - ✓ *un lenguaje de alto nivel*
- ¿Para qué sirve?
  - ✓ *cálculo numérico*
  - ✓ *visualización de datos*
- Fundamentado en un potente cálculo matricial
  - ✓ *explota el hecho de que escalares, vectores y matrices son parientes*
- Arreglos rectangulares ordenados en filas y columnas:
  - ✓ *imágenes*
  - ✓ *movies*
  - ✓ *relaciones lineales de un modelo complejo*
    - ❑ dividir para conquistar

# Usando Matlab

- Ingresemos la siguiente matriz mágica
  - ✓ *del cuadro Melancolía I de Albrecht Dürer (1514)*

» A=[16 3 2 13; 5 10 11 8; 9 6 7 12; 4 15 14 1];

con lo que aparecerá

```
»  A = 16    3  2  13
        5  10 11   8
        9   6   7  12
        4  15 14   1
```

se llama matriz mágica y veremos porqué:

» A(1,1)+A(2,1)+A(3,1)+A(4,1)

» ans

*= 34*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

- más corto:
  - sum(A(:,1))
    =34
  - ✓ *: significa todas las filas de la columna 1 de A*
  - sum (A)
  - ✓ *significa sumar todos los elementos de la A*
- Transpuesta
  - B=A'
  - sum(B)
  - diag(A)
  - sum(diag(A))
- Notación:

$$\begin{array}{ccc} 3 & -99 & 0.0001 \\ 9.6397 & 1.60210E-20 & 6.02252e23 \\ 2i & -3.14159j & 3e5i \end{array}$$

$$\exp(i*(1+i)) = \cos(1+i) + j*\mathrm{sen}(1+i)$$

- Operaciones:
  - C=A-B
  - C=A*B
  - C=A*pi

# Programación en Matlab

➢ Scripts

%Fibscript.m para calcular

%la serie de Fibonacci

*f=[1 1];*

*n=1;*

*while f(n)+f(n+1) < 80*

*f(n+2)=f(n)+f(n+1)*

*n=n+1;*

*end*

➢ Funciones

*function f=fibfun(n)*

*if n > 2*

*f=fibfun(n-1)+fibfun(n-2);*

*else*

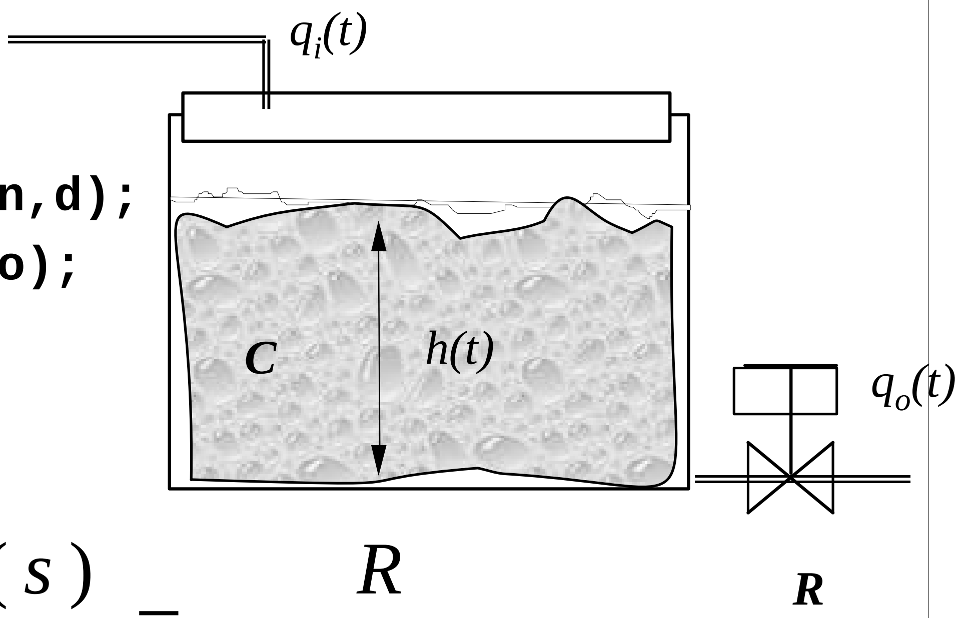
*f=1;*

*end*

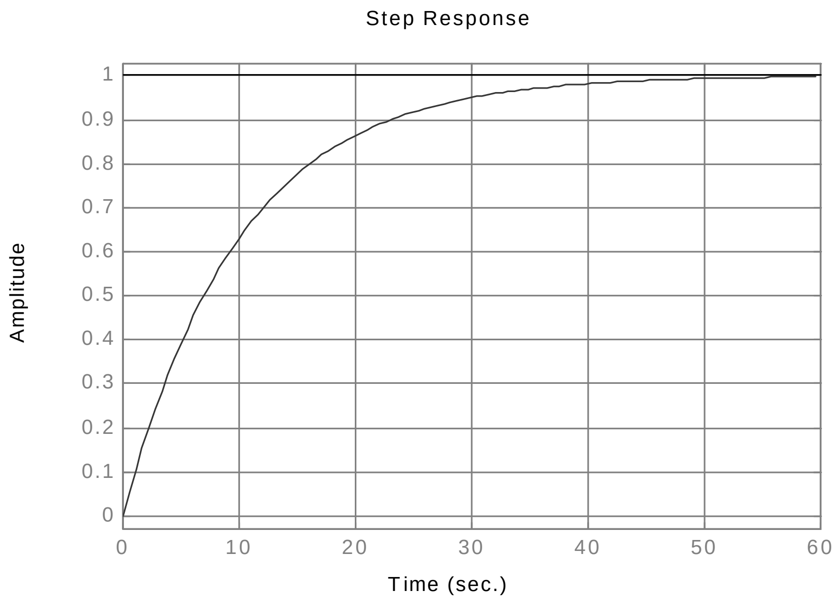
## ➢ Control System Toolbox

✓ *modelos en TL y EE, continuos y discretos*

```
» n=1;
» d=[C*R 1];
» deposito=tf(n,d);
» step(deposito);
```




$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$



# Matlab para Control

- clear
- close all
- kp=3;
- td=0.2;
- n1=1;
- d1=[10 1];
- deposito=tf(n1,d1);
- n2=[kp*td kp];
- d2=[1 1000];
- PD=tf(n2,d2);
- G1=series(PD,deposito);
- Glc=feedback(G1,1);
- t=0:100;
- y=step(Glc,t);
- plot(t,y)
- grid
- xlabel('tiempo [seg.]')
- ylabel ('Nivel [m.]')
- title('Respuesta a Escalón Unitario')