



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.



Sistemas de Control

apuntes capítulo III
(estabilidad)

**Facultad de Ingeniería -
UNCPBA**

**Dto. de Ingeniería
Electromecánica**

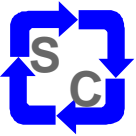
Prof: Dr. Gerardo Acosta

Tema: Estabilidad y compensación - Estabilidad - 1

Prof. Dr. Gerardo Acosta

Asignatura de Sistemas de Control-Facultad de Ingeniería-UNCPBA

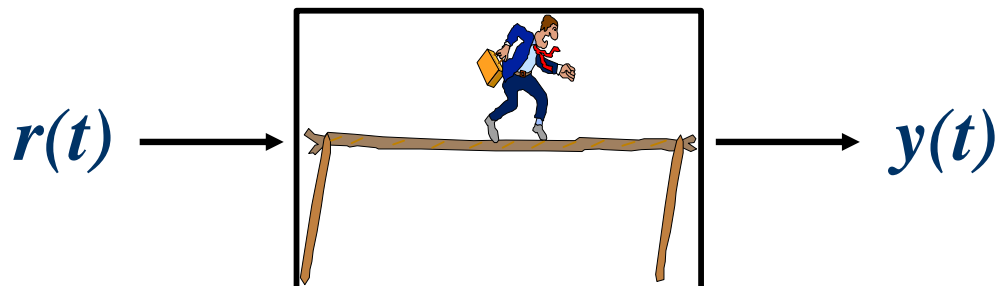
© Copyright de G. Acosta - Prohibida la reproducción o utilización de esta obra sin autorización expresa del autor.



Estabilidad de Sistemas Lineales Continuos



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.



$$y(t) = y(t)_{natural} + y(t)_{forzada}$$

- básicamente 4 posibilidades cuando se extingue la excitación:
 - ✓ *salida oscila alrededor de cierto valor*
 - ✓ *salida persiste en un valor constante*
 - ✓ *salida crece sin más límite que la saturación del sistema*
 - ✓ *salida se extingue (se hace = 0)*
- consideraremos estabilidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_n = 0$$



Estabilidad de Sistemas Lineales Continuos

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\mathbf{t})r(t-\mathbf{t})d\mathbf{t} \quad ; \quad \text{integral de convolución}$$

$$r(t) \text{ debe ser acotada } \Rightarrow |r(t)| \leq M$$

$$\therefore |y(t)| = \left| \int_0^{\infty} h(\mathbf{t})r(t-\mathbf{t})d\mathbf{t} \right| \leq \int_0^{\infty} |h(\mathbf{t})||r(t-\mathbf{t})|d\mathbf{t}$$

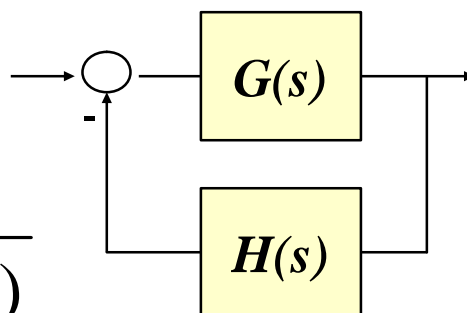
(Lema de Schwartz)

$$\therefore |y(t)| \leq M \int_0^{\infty} |h(\mathbf{t})|d\mathbf{t} \Rightarrow \int_0^{\infty} |h(\mathbf{t})|d\mathbf{t} < P$$

el área bajo la respuesta impulsional del sistema debe ser finita.

➤ ¿Qué significa esto en el Dominio de Laplace?

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



- ✓ *Polos con parte real negativa en el plano (s*
- **CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE**



Estabilidad de Sistemas Lineales Continuos

- es decir, analizar el comportamiento de la

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA (EC)

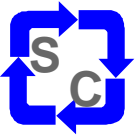
$$1 + G(s)H(s) = 0$$

- que puede expresarse como:

$$1 + F(s) = 1 + K \frac{p(s)}{q(s)} = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

- para analizar la estabilidad de los LTIS:

- Criterio de Routh-Hurwitz
- Método del lugar de las raíces (Evans)
- Diagramas de Bode
- Diagrama de Nyquist



Criterio de Routh-Hurwitz



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

✓ *indica si existen o no polos en el spl. derecho (estabilidad absoluta)*

- si bien contamos con la facilidad de *mp*
- sin necesidad de calcular las raíces de EC
- útil para parámetros desconocidos (*k*)

➤ a partir de la expresión de la EC:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

✓ *la condición necesaria para que existan raíces con parte real negativa:*

- todos los coeficientes de esta ecuación tengan el mismo signo
- ninguno de estos coeficientes se anule

✓ *la condición suficiente:*

- todos los determinantes de Hurwitz

$$D_k \quad ; \quad k=1, 2, \dots, n$$

deben ser positivos



Método de Routh-Hurwitz

$$D_1 = a_{n-1}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \dots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a_n \end{vmatrix}$$

✓ donde los coeficientes de la expresión anterior con subíndice $> n$ o < 0 se reemplazan por 0.

➤ tabla de Routh:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

...

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	...
...

✓ **CRITERIO:** habrá tantas raíces en el spl. derecho como inversiones de signo en la primera columna de la Tabla de Routh



Método de Routh-Hurwitz

➤ Ejemplo 1: EC : $s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 10s + 7 = 0$

✓ 2 polos en el spl. derecho

s^4	1	6	7
s^3	2	10	0
s^2	1	7	0
s^1	-4	0	
s^0	7		

➤ Ejemplo 2: EC : $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$

s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	0	3	...
s^1			
s^0			



s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	e	3	0
s^1	$(2e-3)/e$	0	0
s^0	3		

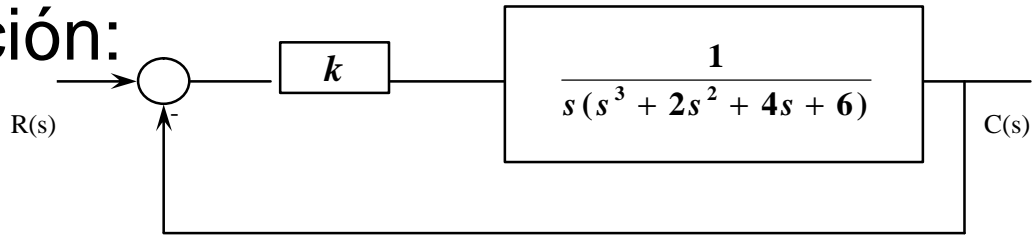
✓ 2 inversiones y por lo tanto 2 polos en el spl. derecho

$$\cong \frac{-3}{e} \text{ pues } e \rightarrow 0$$



Método de Routh-Hurwitz

➤ Aplicación:



$$T(s) = \frac{k}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 6s + k}$$

s^4	1	4	k
s^3	2	6	0
s^2	1	k	
s^1	$6-2k$	0	
s^0	k		

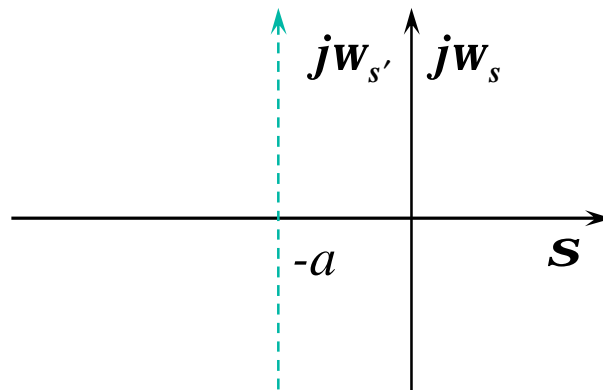
$$k > 0$$

$$6 - 2k > 0$$

$$0 < k < 3$$

➤ Estabilidad relativa:

$$s' = s + a$$

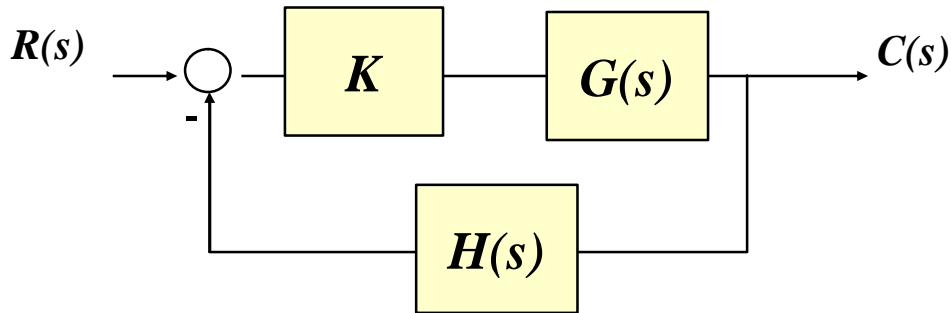


- ❑ desplazar el eje imaginario una constante a
- ❑ aplicar el criterio en esta nueva situación



Método del Lugar de Raíces o Diagrama de Evans

- ✓ se trazan las raíces de la EC en el plano (s variando un parámetro cualquiera, en general, una ganancia de lazo K).



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$T.L.A. = F(s) = G(s)H(s)$$

- ✓ $1 + F(s) = 0$ debe poder escribirse con el parámetro a variar (K) como factor:

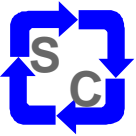
- sino, se la lleva a esta forma.

$$1 + K \frac{p(s)}{q(s)} = 0$$

- ✓ A partir de $1 + F(s) = 0$ surgen los puntos que pertenecen al LR, satisfaciendo las condiciones de módulo y fase:

$$[1] \begin{cases} |G(s)H(s)| = 1 \\ \angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ (2j + 1); j = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

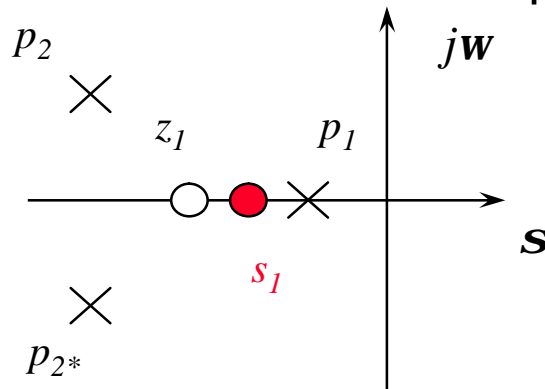
por lo tanto, los polos de LC también satisfacen la [1].



Lugar de raíces

REGLAS CONSTRUCTIVAS

- 1 Ubicar los polos y ceros de $F(s)$
- 2 Variando $0 < K < \text{infinito}$ continuamente, las raíces se mueven desde los polos de $F(s)$ hacia los ceros de $F(s)$
- 3 Las porciones del eje real a la izquierda de un n° impar de singularidades de $F(s)$ pertenecen al diagrama, lo cual se verifica fácilmente con puntos de prueba (s_1):



$$F(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots}{(s - p_1)(s - p_2) \dots}$$

por condición de fase :

$$\langle s - z_1 \rangle + \langle s - z_2 \rangle + \dots - \langle s - p_1 \rangle - \langle s - p_2 \rangle - \dots = 180^\circ \pm j360^\circ$$

los ángulos de los polos complejos conjugados son = y opuestos, luego se anulan. Sólo queda el de 180° que verifica la [1].



Lugar de raíces

4 Determinar las asíntotas:

- ✓ El LR tiene n ramas, donde n es el grado de la EC.
- ✓ Si $F(s)$ tiene un 0 de orden m en el infinito, habrá m ramas del LR que se aproximen a infinito cuando K tienda a infinito, y serán asíntóticas a rectas de pendientes:

$$a_j = \frac{(2j+1)p}{m}; j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- ✓ estas rectas cortan al eje real en un punto s_0 dado por:

$$s_0 = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{m}$$

5 Encontrar los puntos de ruptura de llegada y partida:

- ✓ sabiendo que entre 2 polos será una partida y entre 2 ceros, una llegada
- ✓ son raíces múltiples de la EC, por lo tanto, se obtienen derivando el parámetro respecto de s :

$$1 + F(s) = q(s) + Kp(s) = 0$$
$$\frac{dK}{ds} = - \frac{q'(s)p(s) - p'(s)q(s)}{p^2(s)} = 0$$



Lugar de raíces

⑥ Determinar los ángulos de partida (llegada) para los polos (ceros) complejos:

✓ se consideran las contribuciones del resto de las singularidades

$$\begin{aligned} \therefore 180^\circ - \sum_i \langle s - p_i \rangle + \sum_j \langle s - z_j \rangle &= \Theta_{partida} \\ \therefore 180^\circ + \sum_i \langle s - p_i \rangle - \sum_j \langle s - z_j \rangle &= \Theta_{llegada} \end{aligned}$$

⑦ Encontrar los puntos en los que se corta al eje imaginario:

✓ criterio de Routh

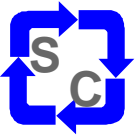
✓ hacer $s = jw$ en la EC e igualar parte real e imaginaria a 0 y despejar K

⑧ Utilizar la condición de módulo para:

✓ encontrar una ganancia K correspondiente a un dado lugar de las singularidades s_k del LR

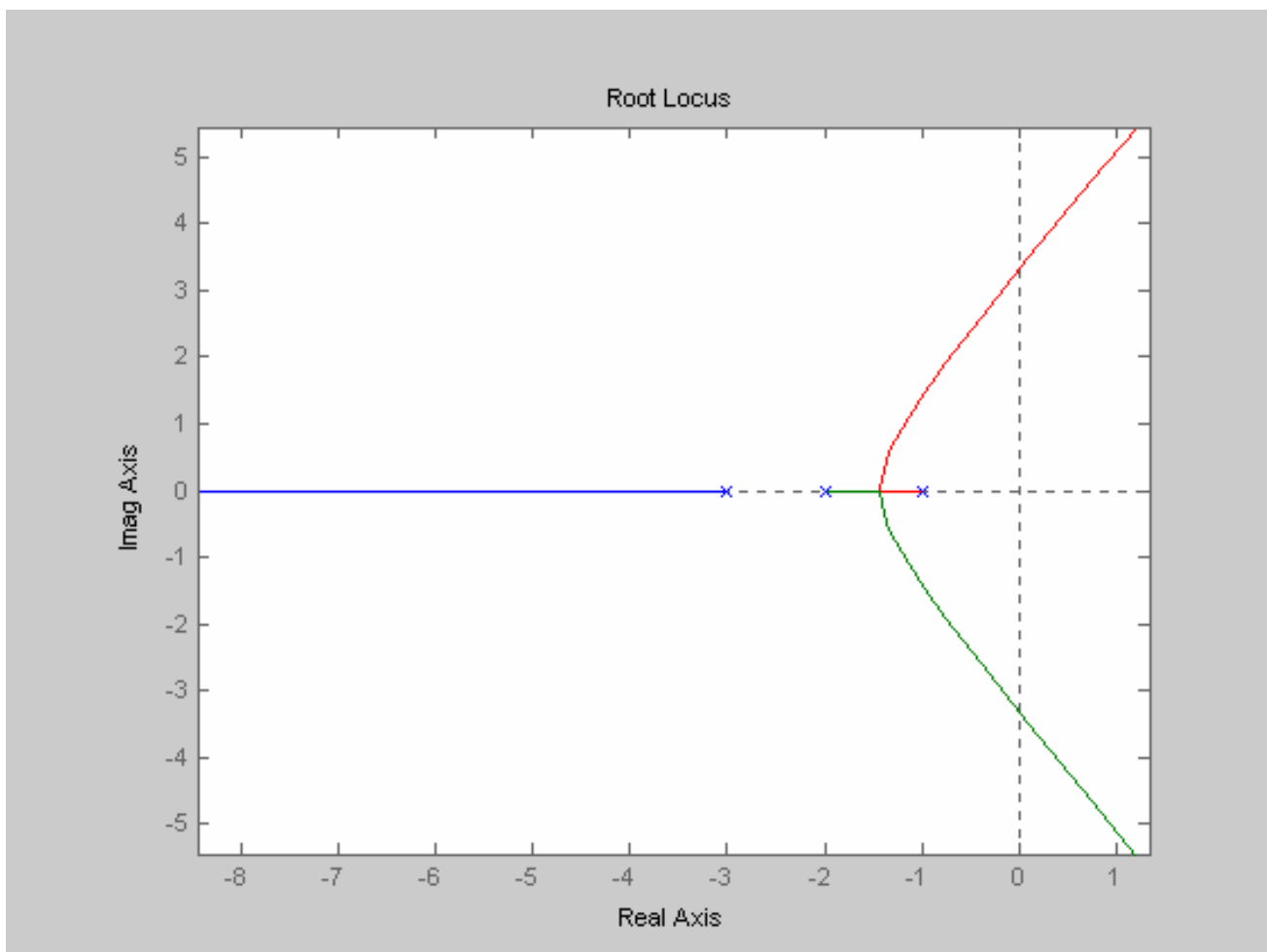
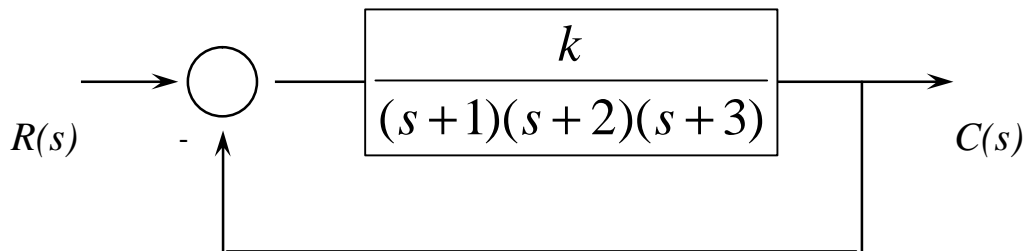
✓ encontrar la ubicación de las singularidades s_k del LR para un dado valor de K ; sabiendo que:

$$K = \frac{\prod_i \text{distancias } e/s_k \text{ y } p_i}{\prod_j \text{distancias } e/s_k \text{ y } z_j}$$



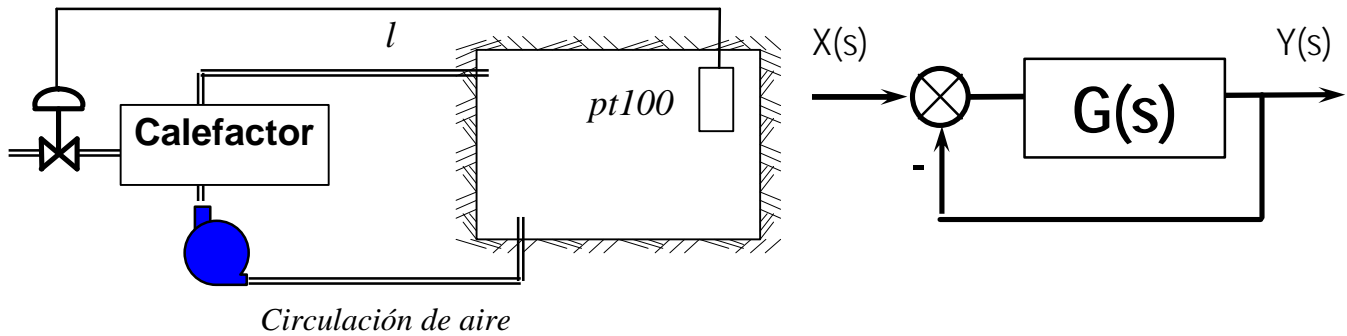
Lugar de raíces

➤ Ejemplo:





Sistemas con retardo



$$l [=] m$$

$$v [=] m/seg$$

$$\text{Retardo } t = l/v [=] seg \quad y(t) = x(t - t)$$

- ✓ Aplicando la propiedad de traslación de una función de la TL:

$$L\{f(t - a)\} = e^{-as} F(s); a \geq 0$$

$$\therefore \text{retardo} = \frac{L\{x(t - t)\}}{L\{x(t)\}} = \frac{e^{-ts} X(s)}{X(s)}$$

- ✓ Sea la FT para la figura:

- construiremos su lugar de raíces

$$G(s) = \frac{ke^{-ts}}{1 + s}$$

$$E.C. = 1 + \frac{ke^{-ts}}{1 + s} = 0$$

Ec. Trascendente que da infinitas raíces



Sistemas con retardo

- ✓ la cantidad de ramas del L.R. será infinita y la pendiente = 0
- ✓ la condición de ángulo establece que:

$$\langle e^{-ts} \rangle - \langle s + 1 \rangle = \pm 180^\circ (2p + 1); \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

pero $\langle e^{-ts} \rangle = \langle e^{-ts - tjw} \rangle = 0$ (estado estacionario)

$$\therefore \langle e^{-ts} \rangle = \langle e^{-tjw} \rangle = \langle \cos wt - j \operatorname{sen} wt \rangle$$

$$\therefore \langle e^{-ts} \rangle = -wt \quad (\text{radianes}) = -57,3wt \quad (\text{gra})$$

$$\therefore -57,3wt - \langle s + 1 \rangle = \pm 180^\circ (2p + 1)$$

- ✓ pero como t es constante, la fase del retardo es función de w

□ para $p = w = 0$: $= 0$

$$\langle s + 1 \rangle = \pm 180^\circ - 57,3wt$$

- para el resto de las ω_i , se traza una recta que pasa por $\sigma = -1$ con pendiente $180^\circ - 57,3 \omega_i \tau$. La intersección de esta recta con la horizontal $j\omega_i$ es un punto del L.R.

- si $\tau=1$ el punto de ruptura es -2



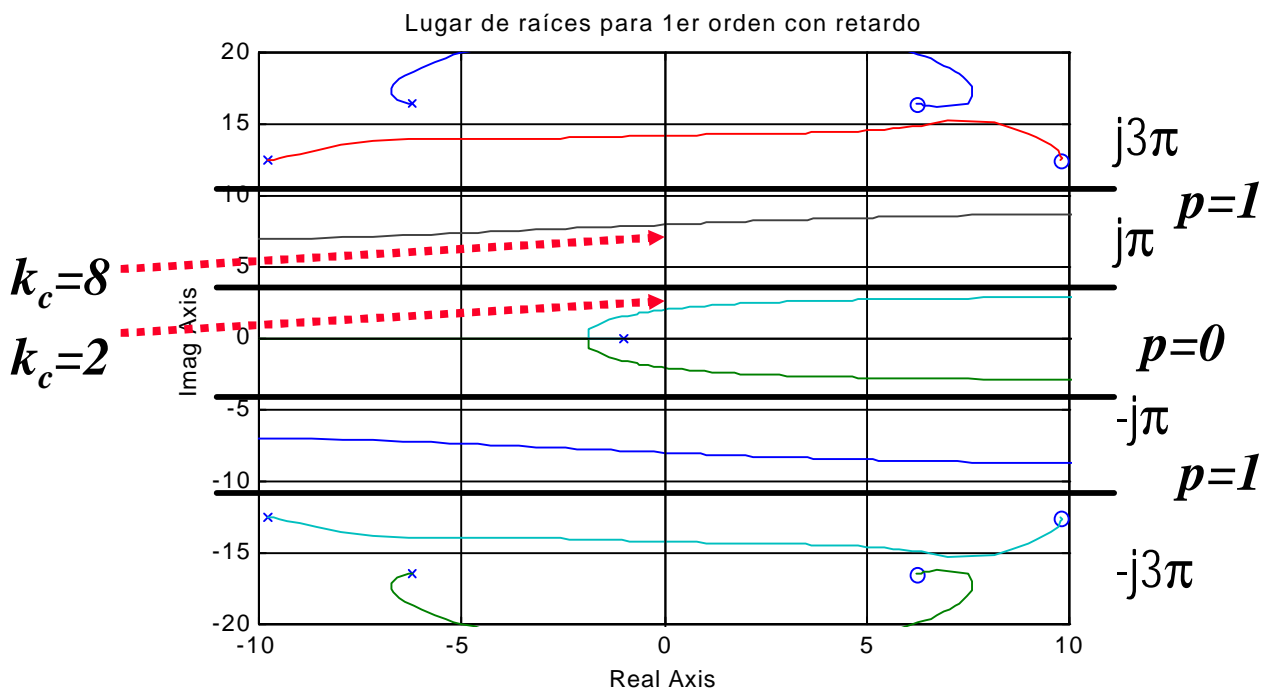
Sistemas con retardo

✓ Se verifica que si s tiende a infinito, la FT a LA tiende a menos infinito:

□ $s = -\infty$ es también polo de L.A.

✓ La E.C. tiene infinitas ramas al ir variando p :

si $p = 1$: $\langle s + 1 \rangle = \pm 540^\circ - 57,3wt = \pm 3p - wt$



✓ interesa la rama primaria desde el punto de vista de la estabilidad

➤ CONCLUSIÓN:

- el retardo introduce inestabilidad
- aun en un primer orden



Respuesta en Frecuencia

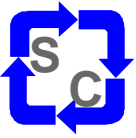
- ¿Cómo se encuentra la RF de un LTIS?
 - ✓ se varía la frecuencia de una senoide a la entrada y se registra cómo varía la salida
- Ventajas
 - ✓ sencillas y bastante exactas
 - ✓ determinación en forma experimental de la FT de componentes complejos
 - ✓ sea un LTIS estable:

$$x(t) = X \text{sen } \omega t \quad \begin{array}{c} X(s) \\ \longrightarrow \end{array} \boxed{G(s)} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ Y(s) \end{array}$$

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s + s_1)(s + s_2)\dots(s + s_n)}$$

por lo tanto

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} X(s)$$



Respuesta en Frecuencia

➤ Desarrollando en fracciones parciales:

$$Y(s) = G(s) X(s) = G(s) \frac{wX}{s^2 + w^2}$$

Seno @ Laplace

$$Y(s) = \frac{a}{s+jw} + \frac{a^*}{s-jw} + \frac{b_1}{s+s_1} + \frac{b_2}{s+s_2} + \dots + \frac{b_n}{s+s_n}$$

✓ a y b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) son constantes y a^* es el complejo conjugado de a .

✓ Antitransformando:

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + a^* e^{j\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + b_2 e^{-s_2 t} + \dots + b_n e^{-s_n t}$$

y como el sistema es estable, en estado estacionario tendremos que:

$$y(t)_{ss} = ae^{-j\omega t} + a^* e^{j\omega t}$$

✓ Esto para polos distintos, si se incluyen polos s_j de multiplicidad m_j , $y(t)$ incluirá términos como

$$t^{h_i} e^{-s_j t}$$

$$\text{con } h_i = 0, 1, \dots, m_j - 1$$



Respuesta en Frecuencia



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

$$\checkmark \text{ luego } a = G(s) \frac{wX}{s^2 + w^2} (s + jw) \Big|_{s=-jw}$$

$$a = \frac{-XG(-jw)}{2j} \quad a^* = \frac{XG(jw)}{2j}$$

$$G(jw) = |G(jw)|e^{jq}; \quad \mathbf{q} = \langle G(jw) \rangle = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\text{Im}\{G(jw)\}}{\text{Re}\{G(jw)\}} \right]$$

$$G(-jw) = |G(-jw)|e^{-jq} = |G(jw)|e^{-jq}$$

$$y(t)_{ss} = X |G(jw)| \frac{e^{j(wt+q)} - e^{-j(wt+q)}}{2j} = X |G(jw)| \text{sen}(wt + q)$$

$$y(t)_{ss} = Y \text{sen}(wt + q)$$

- ✓ *así se demuestra que LTIS ante una señal senoidal de entrada, una vez alcanzado el estado estacionario, posee una salida de igual frecuencia*
- ✓ *en estado estacionario se puede reemplazar en la FT s por jw*

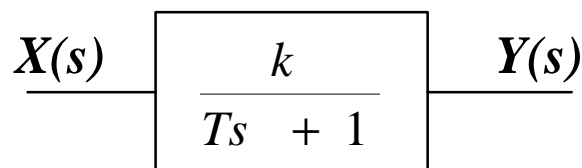


Respuesta en Frecuencia

- ✓ La amplitud de salida S es $X|G(j\omega)|$
- ✓ El desfase entre E y S es $q = \langle G(j\omega) \rangle$
- ✓ de este modo módulo y fase de la función de transferencia senoidal $G(j\omega)$ son:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right|; \quad \langle G(j\omega) \rangle = \left\langle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right\rangle$$

- ✓ ejemplo



si $x(t) = \sin \omega t \rightarrow y(t)_{ee}$ se puede hallar reemplazando s por $j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 - \omega^2 T^2}} \quad q = -tg^{-1} T\omega$$

$$\therefore y(t)_{ee} = \frac{Xk}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \text{sen} (\omega t - tg^{-1} T\omega)$$



Relación con el mapa cero - polar

$$G(s) = \frac{k(s + z)}{s(s + p)} \quad ; p \text{ y } z \text{ son reales}$$

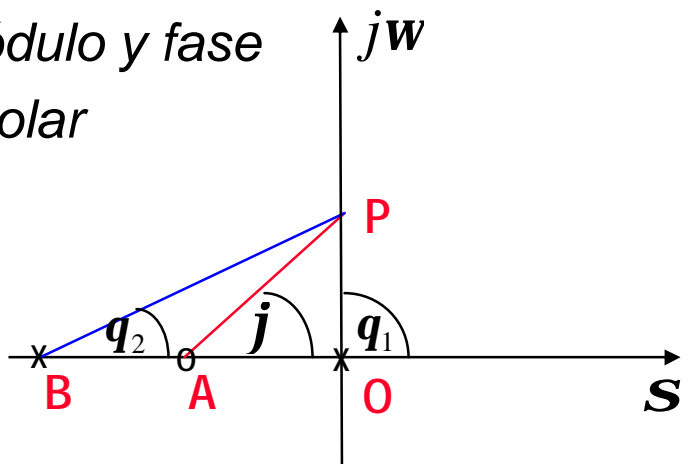
$$\therefore G(j\omega) = \frac{k(j\omega + z)}{j\omega(j\omega + p)}$$

✓ elijo un punto de prueba P:

$$|G(j\omega)| = \frac{k |j\omega + z|}{|j\omega| |j\omega + p|} = \frac{k |AP|}{|OP| |BP|}$$

$$\begin{aligned}
 \langle G(j\omega) \rangle &= \langle j\omega + z \rangle - \langle j\omega \rangle - \langle j\omega + p \rangle \\
 &= \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{z} - 90^\circ - \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{p} \\
 &= \mathbf{j - q_1 - q_2}
 \end{aligned}$$

✓ es posible obtener módulo y fase a partir del mapa cero-polar de la FT





Diagramas de Bode

➤ Se tienen dos gráficos:

✓ $\log |G(j\omega)|$ vs. $\log \omega$

✓ $\langle G(j\omega) \rangle$ vs. $\log \omega$

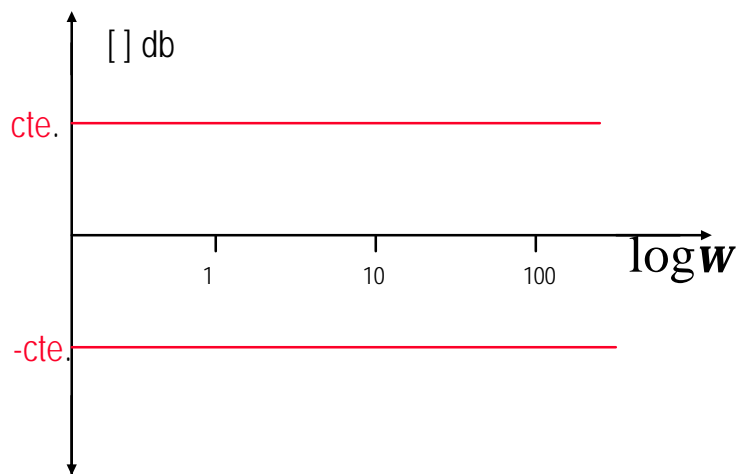
✓ *normalización del módulo* $| | \rightarrow 20 \log |G(j\omega)|$

✓ *en (db), escala logarítmica de ω*

□ su ventaja es la sencillez

✓ *factores básicos:*

ganancia k :



$20 \log k = cte.$ (si $k > 1$) ó $k = -cte.$ (si $k < 1$)

□ *amplificación o atenuación*



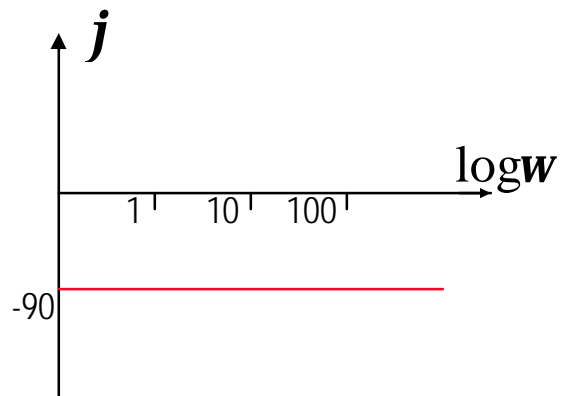
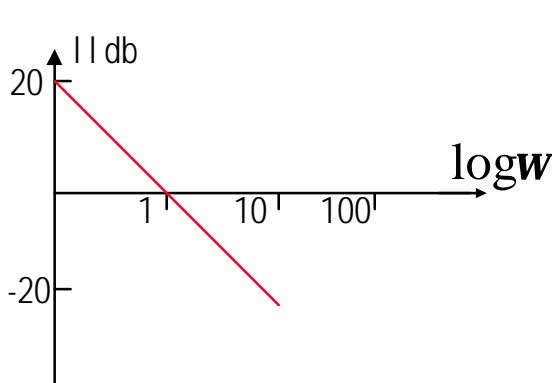
Diagramas de Bode

✓ factor integral:

✓ polo: $\left(\frac{1}{j\omega}\right)$ $20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ [db]}$

$$\left\langle \frac{1}{j\omega} \right\rangle = -90^\circ$$

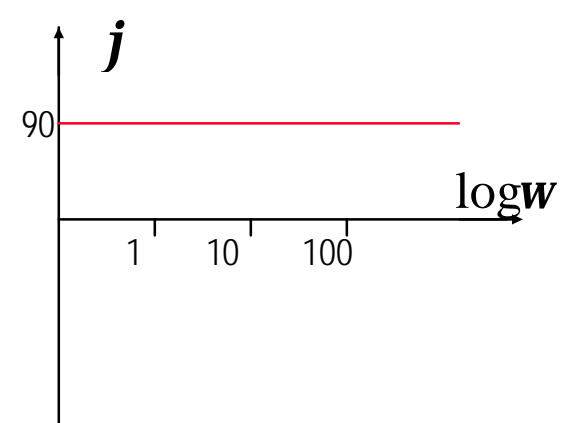
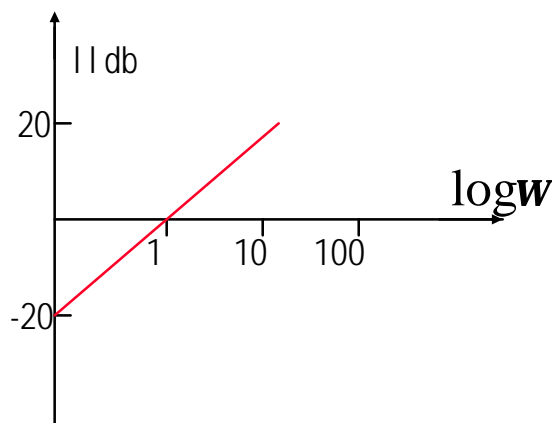
- ▢ ubicamos un punto $0\text{db}; \omega = 1$
- ▢ la pendiente es -20db/década



✓ factor derivativo:

✓ cero: $(j\omega)$ $20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ [db]}$

$$\langle j\omega \rangle = 90^\circ$$





Diagramas de Bode

➤ *En definitiva:*

- ✓ si orden del sistema = n, entonces pendiente = -20n y fase = -90n
- ✓ Ejemplo: para un sistema de segundo orden:
 - ▣ pendiente = -40 db/dec., fase = -180

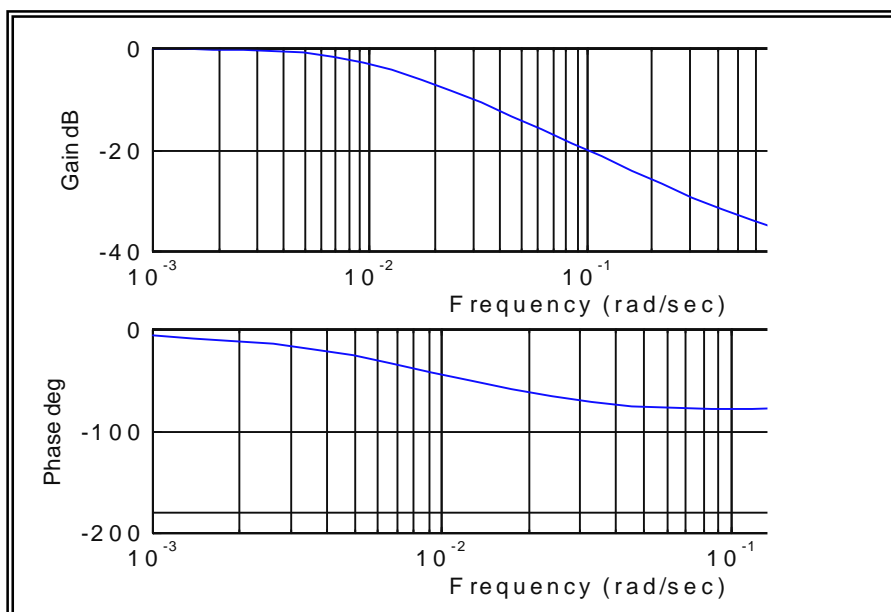
➤ *Primer orden*

- ✓ *Polo en 1/T:*

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ [db]}$$

si $\omega T \ll 1 \therefore -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong -20 \log 1 = 0 \text{ [db]}$

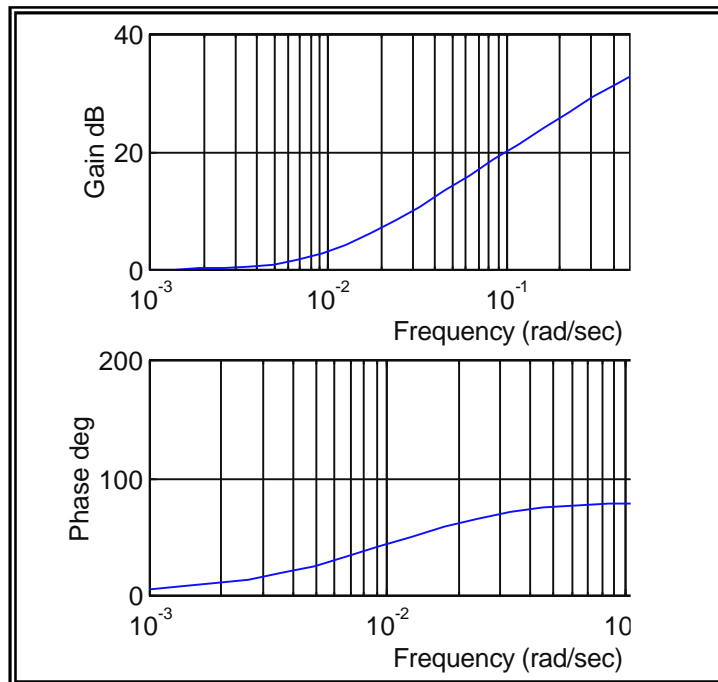
si $\omega T \gg 1 \therefore -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong -20 \log \omega T \text{ [db]}$





Diagramas de Bode

✓ Cero en $1/T$: $20\log|1 + j\omega T|$



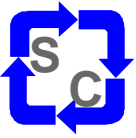
✓ para ambos casos, error entre curva real y asíntotas = 3 db

➤ Factores cuadráticos

✓ sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta s \omega_n + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$\therefore G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



Diagramas de Bode

✓ *magnitud:*

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2x \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(\frac{2x\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

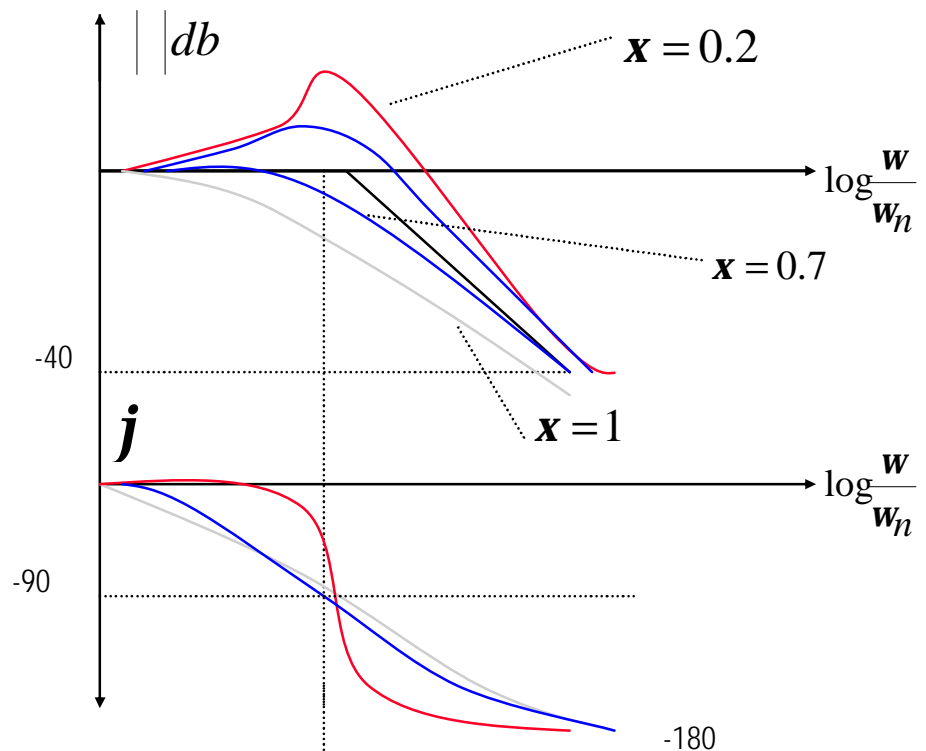
si $\omega \ll \omega_n \rightarrow -20 \log 1 = 0 [db]$

si $\omega \gg \omega_n \rightarrow -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} [db]$

✓ *fase:*

$$j = -\operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2x \left(\omega / \omega_n \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$$

*magnitud y fase
dependen del
amortiguamiento*

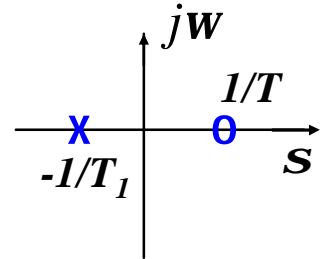
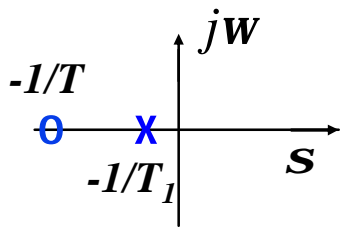




Sistemas de no mínima fase

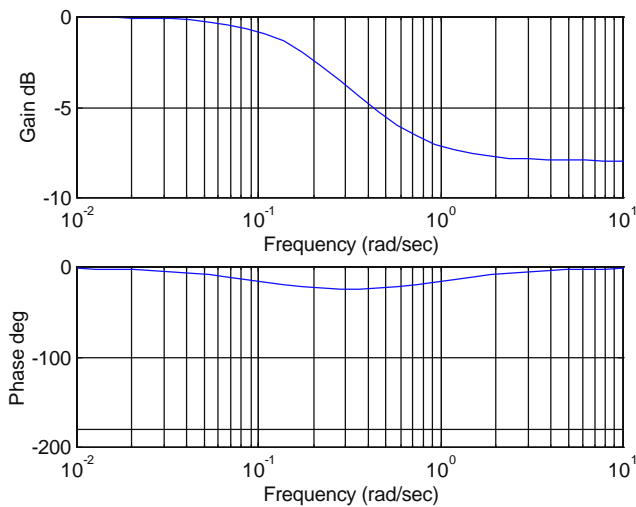
$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad 0 < T < T_1$$

✓ *estos dos sistemas poseen = módulo, pero difieren en la fase*

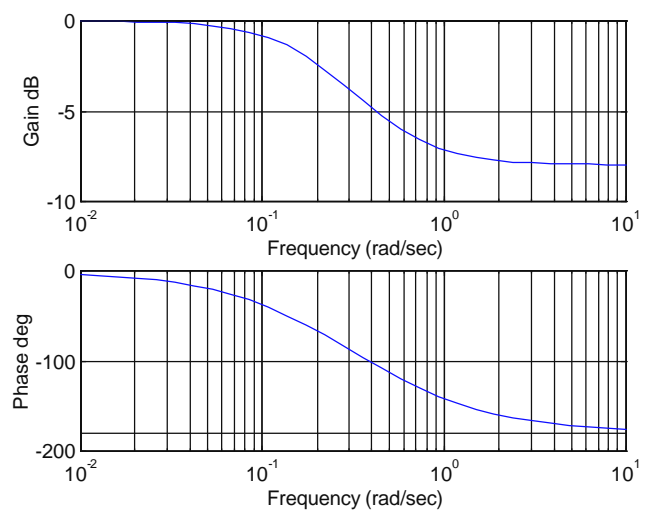


(Relación biunívoca fase y módulo)

Mínima fase



No mínima fase





Sistemas con retardo

- ✓ Aunque los dos sistemas son estables (no poseen polos en el semiplano derecho), el de no mínima fase puede tornarse inestable

$$G(s) = \frac{a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} \dots}{b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} \dots} k$$

- ✓ si es de mínima fase, entonces:

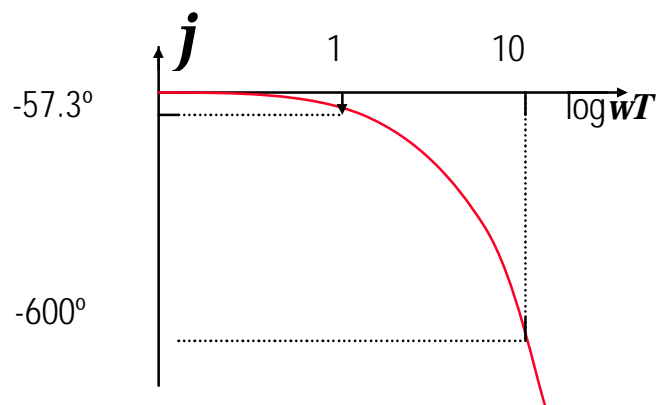
$$w \rightarrow \infty \therefore \begin{cases} |db| \rightarrow \text{pendiente de } -20(q-p) \text{ db / década} \\ \langle \rangle \rightarrow -90^\circ (q-p) \end{cases}$$

- los de no mínima fase se evitan por lentitud (debida a respuesta inversa)

➤ Sistemas con retardo

- Análisis frecuencial:

$$G(jw) = e^{-jwT} \therefore \begin{cases} |G(jw)| = |\cos wT - j \sin wT| = 1 \\ \langle G(jw) \rangle = -wT \text{ [rad]} = -57,3wT \text{ [}^\circ\text{]} \end{cases}$$





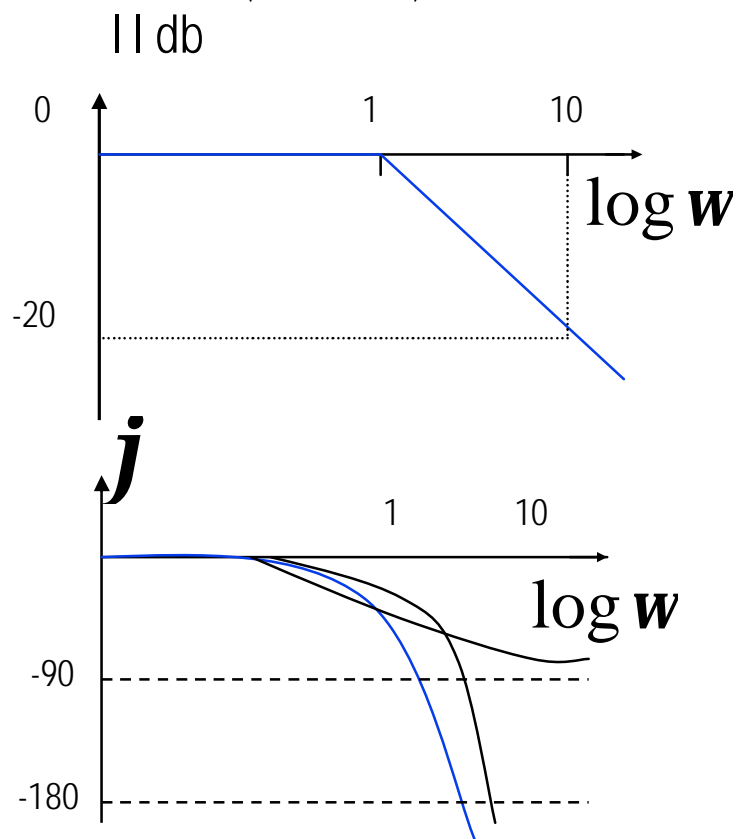
Sistemas con retardo

✓ Ejemplo:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

$$\text{Magnitud : } 20 \log |e^{j\omega L}| + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = 0(\text{db}) + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

$$\text{Fase : } G(j\omega) = \langle e^{-j\omega L} \rangle + \left\langle \frac{1}{1 + j\omega T} \right\rangle = -\omega L - \text{tg}^{-1} \omega T$$



✓ **Conclusión:** el retardo no aporta al módulo, pero si a la fase, y tiende a inestabilizar al sistema



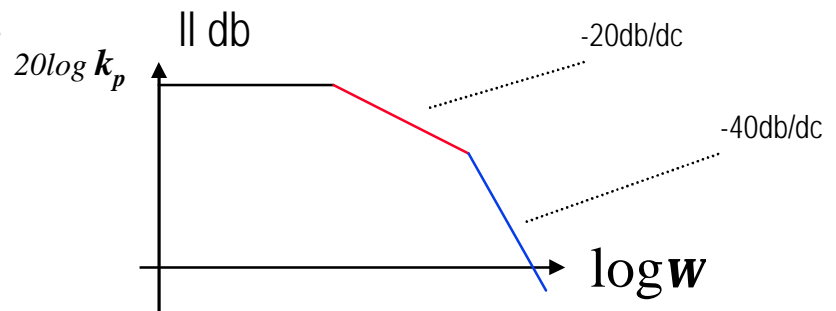
Coeficientes de error

➤ Determinación de los coeficientes de error

✓ sistema tipo 0:

$k_p =$ coeficiente de error de posición

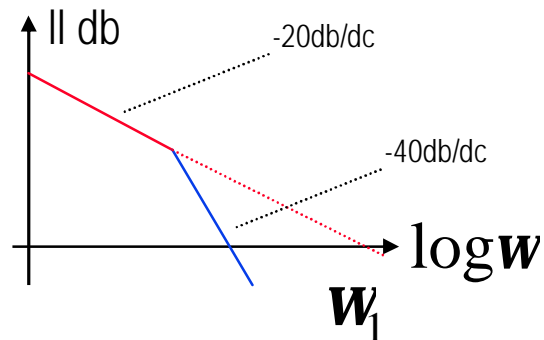
$$\lim_{w \rightarrow 0} G(jw) = k_p$$



✓ sistema tipo 1:

$k_v =$ coef. de error de velocidad

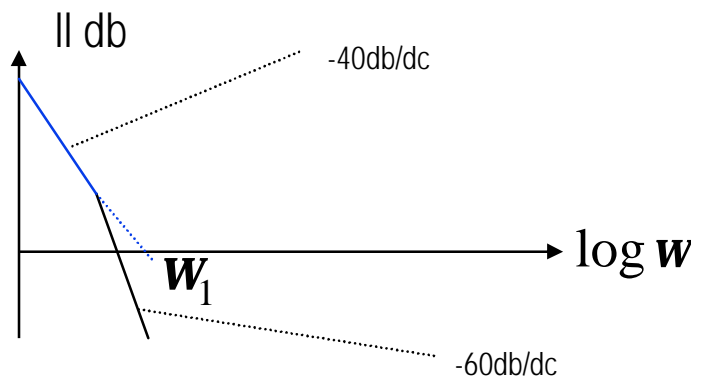
$$w_1 = k_v$$

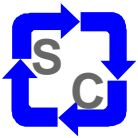


✓ sistema tipo 2:

$k_a =$ coef. de error de aceleración

$$(w_1)^2 = k_a$$





Análisis de estabilidad relativa mediante margen de fase y margen de ganancia



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

✓ **Ganancia crítica:** el o los puntos en que la amplitud de $G(j\omega) = 1 \Rightarrow |G(j\omega)| = 1 \text{ o } 0 \text{ (db)}$

✓ **Fase crítica:** $\langle G(j\omega) \rangle = 180^\circ$

➤ a partir de esta sintaxis definimos:

Margen de fase: cantidad de retraso de fase que se requiere añadir para llevar al sistema al borde de la inestabilidad, en el punto de ganancia crítica

$$MF = 180^\circ + j \quad j = \langle G(j\omega) \rangle$$

Margen de ganancia: el recíproco de $|G(j\omega)|$ a la frecuencia de fase crítica

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega)_{fc}|}$$

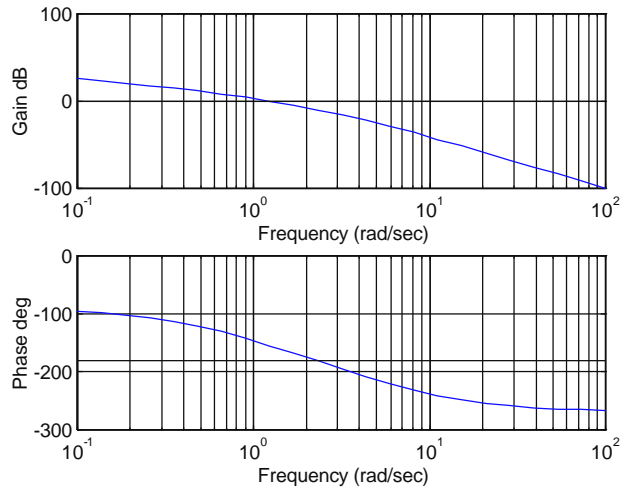
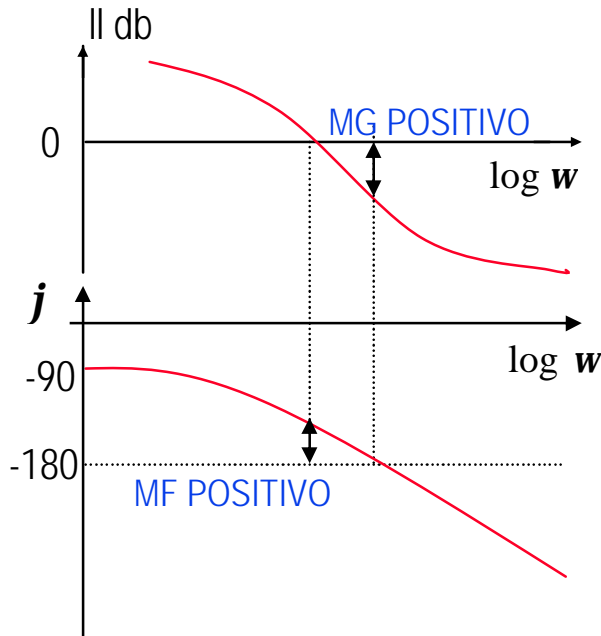


Análisis de estabilidad relativa mediante margen de fase y margen de ganancia

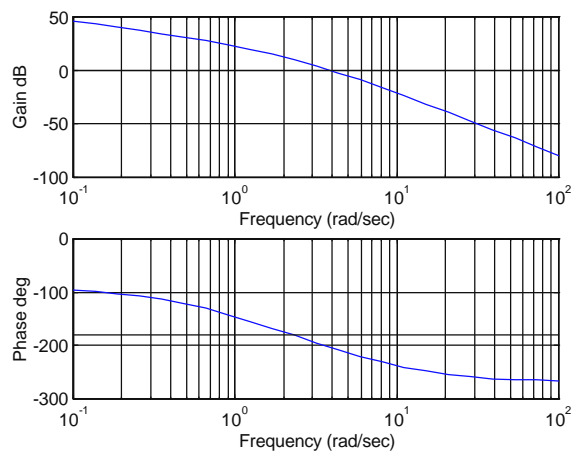
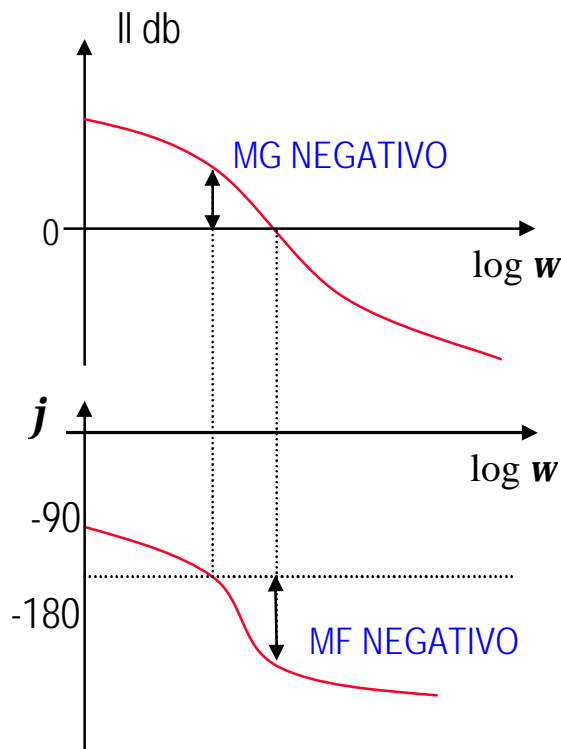


ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

➤ Sistema estable:



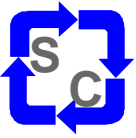
➤ Sistema inestable:





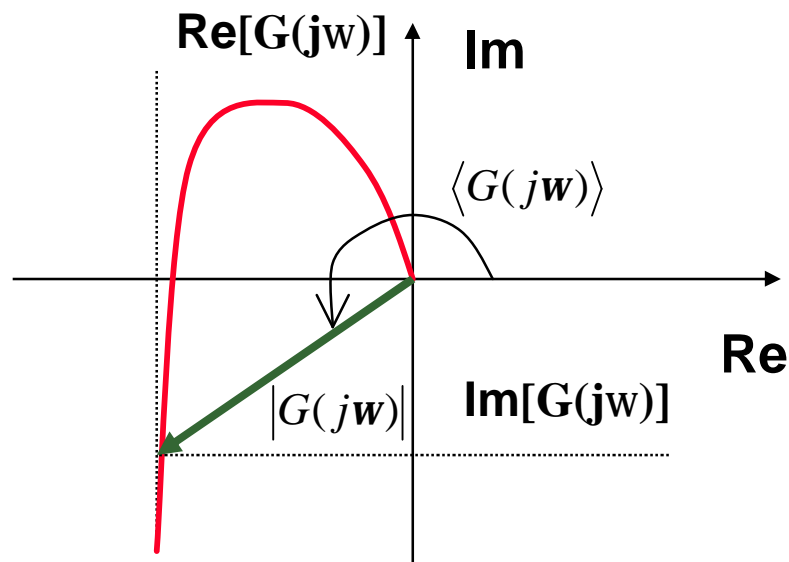
➤ CONCLUSIÓN:

- ✓ *Para que el sistema sea estable, MG y MF , deben ser positivos (sistema de mínima fase)*
- si el sistema es estable podemos estudiar qué tanto lo es (estabilidad relativa)
- MF y MG se definen para distintos rangos de funcionamiento en frecuencia, para cubrirse por variaciones en componentes
- valores usuales:
$$30^\circ < MF < 60^\circ \text{ y } MG > 6\text{db}$$



Diagramas polares

- ✓ Graficar en un solo diagrama módulo y fase de la FT senoidal



➤ Factores básicos:

- ✓ Factor integral: $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \langle 90^\circ \rangle$
 - el eje imaginario negativo

- ✓ Factor derivativo $G(j\omega) = j\omega$
 - el eje imaginario positivo

- ✓ Factores de 1er. Orden:

- POLO:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \langle -\text{tg}^{-1} \omega T \rangle$$



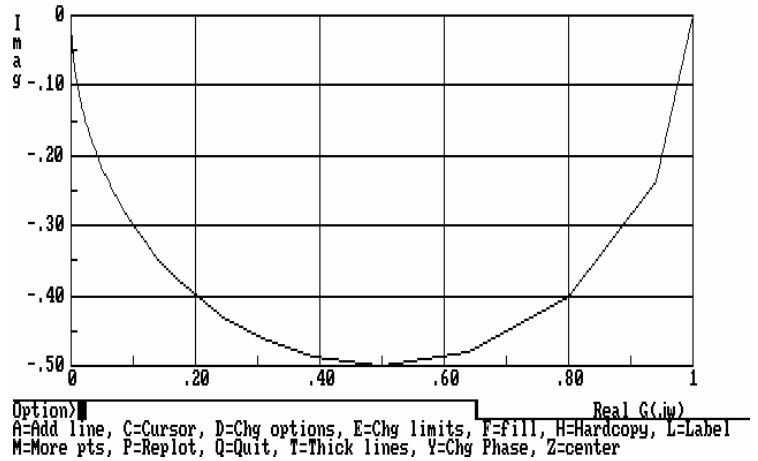
Diagramas polares

- Probamos con varios puntos:

$$w = 0: G(j0) = 1 \langle 0^\circ \rangle$$

$$w = 1/T: G(j1/T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 45^\circ \rangle$$

$$w \rightarrow \infty: G(j\infty) = 0 \langle -90^\circ \rangle$$

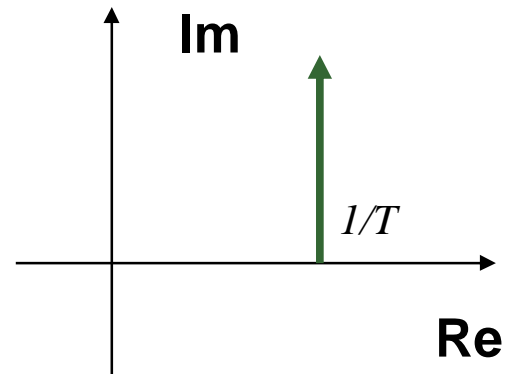


- CERO:

$$G(jw) = 1 + jwT$$

✓ Factores cuadráticos:

- POLOS:

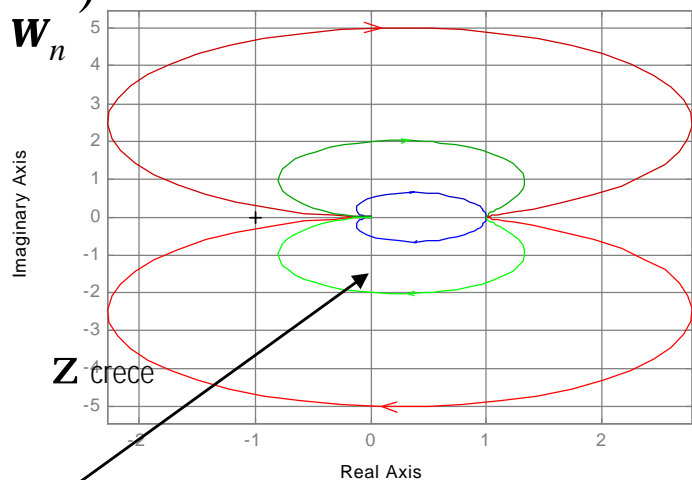


$$G(jw) = \frac{1}{1 + 2x(j\frac{w}{w_n}) + (j\frac{w}{w_n})^2}; \quad x > 0$$

Nyquist Diagrams

$$\lim_{w \rightarrow 0} G(jw) = 1 \langle 0^\circ \rangle$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} G(jw) = 0 \langle -180^\circ \rangle$$





Diagramas polares



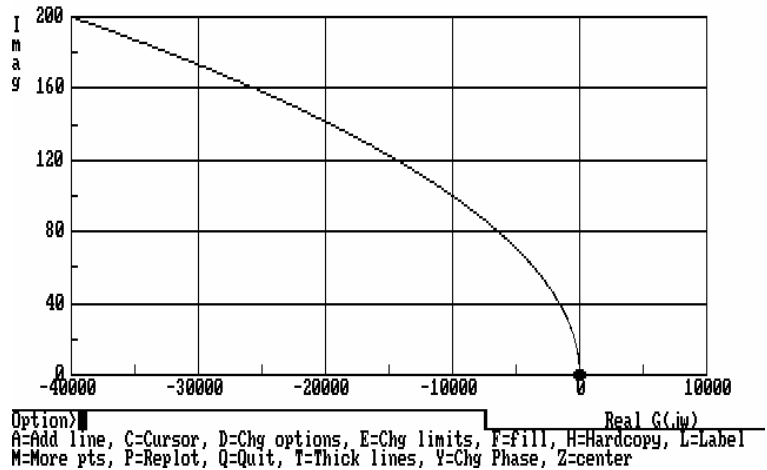
ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

□ CEROS:

$$G(j\omega) = 1 + 2x\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2x\frac{\omega}{\omega_n}; \quad x > 0$$

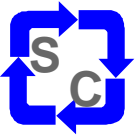
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \langle 0^\circ \rangle$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = -\infty \langle 180^\circ \rangle$$



➤ Principio del Argumento

- ✓ *mapeo de funciones analíticas de variables complejas*
- ✓ *Sea $F(s)=U(s,w) + jV(s,w)$, es analítica sii verifica que para un dominio D , dF/ds es continua en D .*



Principio del argumento

- ✓ *es posible si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D:*

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial w} \\ \frac{\partial U}{\partial w} = \frac{\partial V}{\partial s} \end{array}}$$

- ✓ *Las FT de los sistemas físicos reales son analíticas en todo el plano (s, excepto en los polos*
- ✓ *Cualquier punto del plano (s puede mapearse al plano (F*

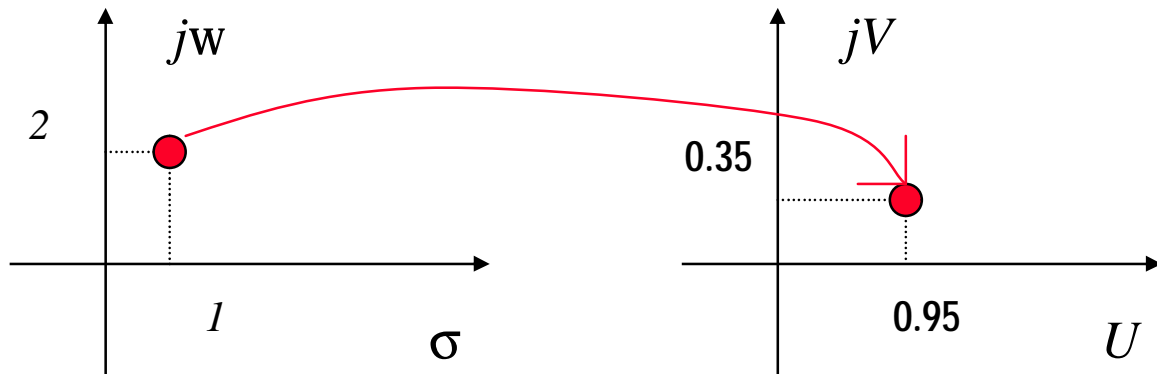
➤ Ej.:

$$F(s) = \frac{2s+3}{s+5}; \quad s_1 = 1 + j2 \therefore F(s_1) = 0,95 + j0,35$$

Función de mapeo



Principio del argumento

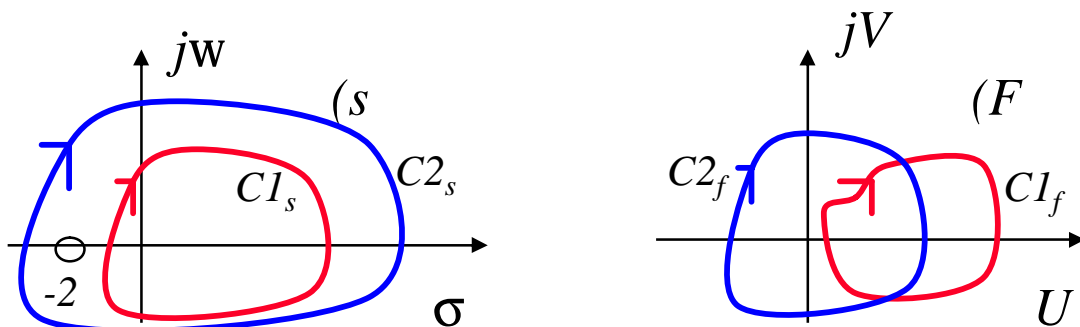


- ✓ Si $F(s)$ es una función analítica en el plano (s , excepto para un # finito de polos dentro de una curva C_s , entonces con un recorrido alrededor de C_s , el contorno correspondiente C_f en el plano (F encerrará al origen (punto crítico) N veces.

$$N = z - p;$$

$z = \#$ de ceros y $p = \#$ de polos de $F(s)$ dentro de C_s

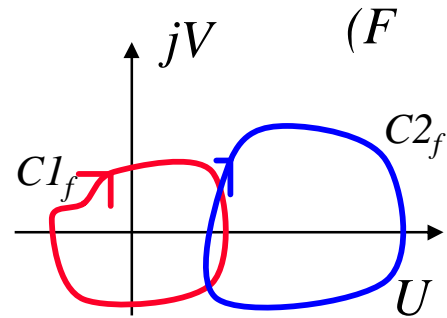
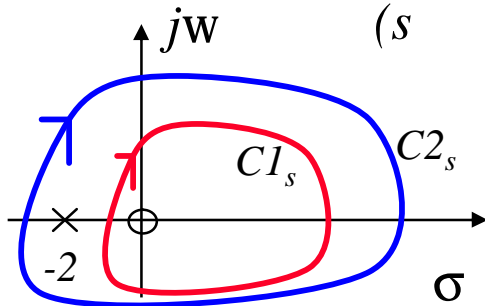
- ✓ Ej. 1: $F(s) = s + 2$





Principio del argumento

✓ Ej. 2: $F(s) = \frac{s}{s+2}$



➤ Caso $N > 0$

- ✓ se encierran más ceros que polos en (s)
- ✓ C_f rodea al origen de (F) en la misma dirección que C_s

➤ Caso $N = 0$

- ✓ se encierran igual cantidad de ceros que de polos en (s)
- ✓ C_f no rodea al origen de (F)

➤ Caso $N < 0$

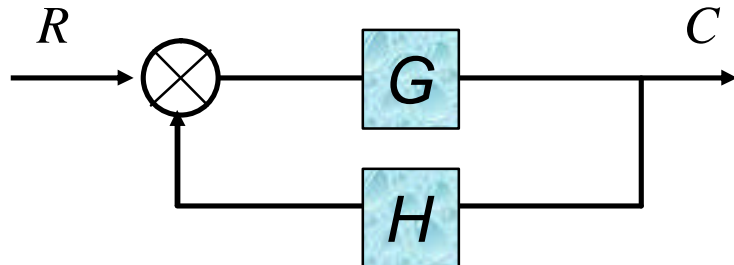
- ✓ se encierran más polos que ceros en (s)
- ✓ C_f rodea al origen de (F) en la dirección opuesta que C_s



Criterio de estabilidad de Nyquist

➤ Introducción:

- Sea



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$E.C. = 1 + F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{(s + z_1) + (s + z_2) \dots + (s + z_m)}{(s + p_1) + (s + p_2) \dots + (s + p_n)}$$

✓ *Interesa analizar la posición de polos y ceros de lazo abierto ($G(s)H(s)$) para determinar la estabilidad de lazo cerrado:*

- polos de LC = ceros de $F(s)$ (raíces de la EC)
- polos de LA = polos de $F(s)$
- $\neg \exists$ restricción en cuanto a la ubicación de los polos de LA para que el sistema sea estable a LC

➤ Objetivo:

- ✓ *determinar las raíces de $F(s)$ en el spl. derecho de (s)*
 - son los polos del sistema realimentado
- ✓ *emplea el principio del argumento*

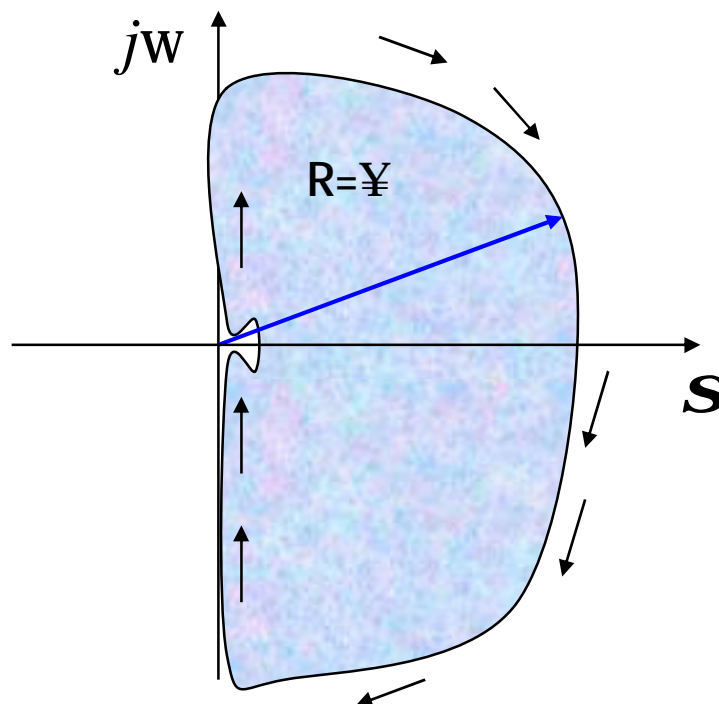


Criterio de estabilidad de Nyquist

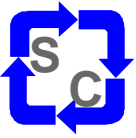


ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

□ para que el sistema sea estable, $F(s)$ no debe tener ceros encerrados por la siguiente curva (paso de Nyquist)



□ si en lugar de transformar sobre F lo hacemos sobre $(G(s)H(s))$ (transferencia de lazo abierto), el punto crítico **cambia** del origen al $-1 + j0$



Criterio de estabilidad de Nyquist



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

✓ de este modo, dado un sistema de control que tiene una $EC = 1 + G(s)H(s) = 0$, se siguen los siguientes pasos:

1. Dibujar la gráfica de $G(s)H(s)$ en el plano (GH)

2. Observar el # de rodeos al punto crítico $-1 + j0$
($N = Z - P$)

→ Z = # de ceros de $1 + GH$ dentro del paso de Nyquist

→ P = # de polos de $1 + GH$ dentro del paso de Nyquist (los mismos que los de GH)

3. Analizar la condición de estabilidad a lazo cerrado ($Z=0$)

$$\setminus \quad N = -P$$

ENUNCIADO: Un sistema realimentado será estable si y sólo si el número de rodeos al punto $-1 + j0$ en sentido anti-horario por parte del contorno de Nyquist en el plano $GH(s)$, es igual al número de polos de $GH(s)$ dentro del paso de Nyquist en el plano (s)

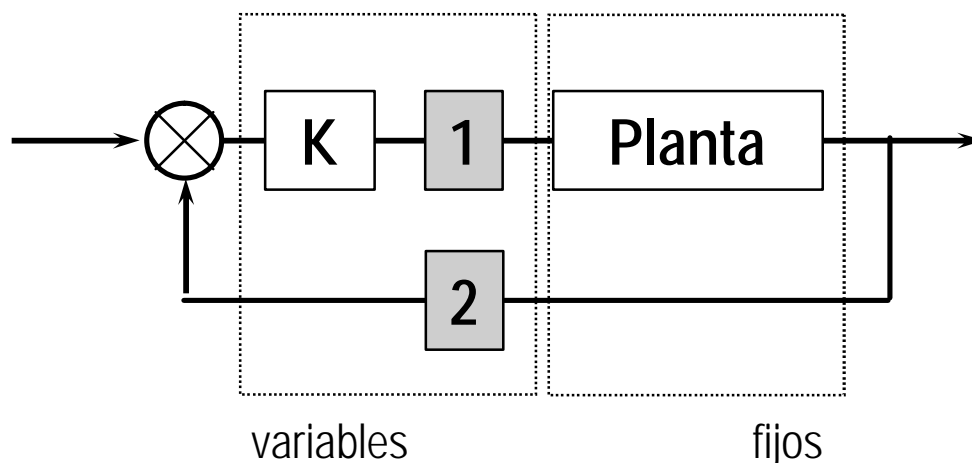


Nociones de Compensación

- No siempre se consiguen las especificaciones
 - ✓ *transitorias* (@t; @f)
 - ✓ *permanentes* (precisión)
- con sólo variar una ganancia de lazo
- Necesidad de:
 - ✓ *variar el mapa cero-polar*

® COMPENSADORES

- mezcla de análisis (de lo que tengo) y síntesis (de lo que quiero)
- camino de baja potencia (señal)
 - en serie (cascada con el proceso)
 - en paralelo (lazo de realimentación)





Compensadores en serie

➤ su FT:

$$G_c(s) = K_c \frac{(s + z)}{(s + p)}$$

- ✓ se requiere conocer el modelo de la planta
- ✓ las diferentes posiciones relativas de **p** y **z** permiten variar módulo y fase
- ✓ existen 3 tipos básicos:
 - por avance de fase (derivadores)
 - por retraso de fase (integradores)
 - por avance-retraso

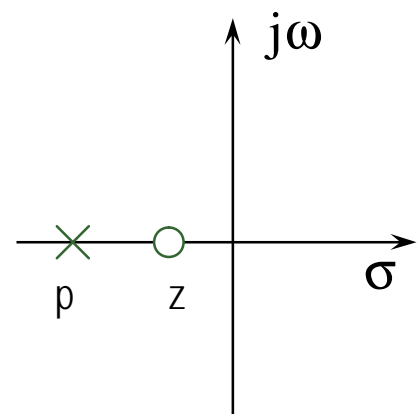
➤ Compensadores por avance

- se define

$$a = \frac{p}{z}; \quad t = \frac{-1}{p}$$

$$\therefore G_c(s) = K_c \frac{z(s/z + 1)}{p(s/p + 1)}$$

$$\therefore G_c(j\omega) = \frac{K_c}{a} \frac{(j\omega a t + 1)}{(j\omega t + 1)}$$



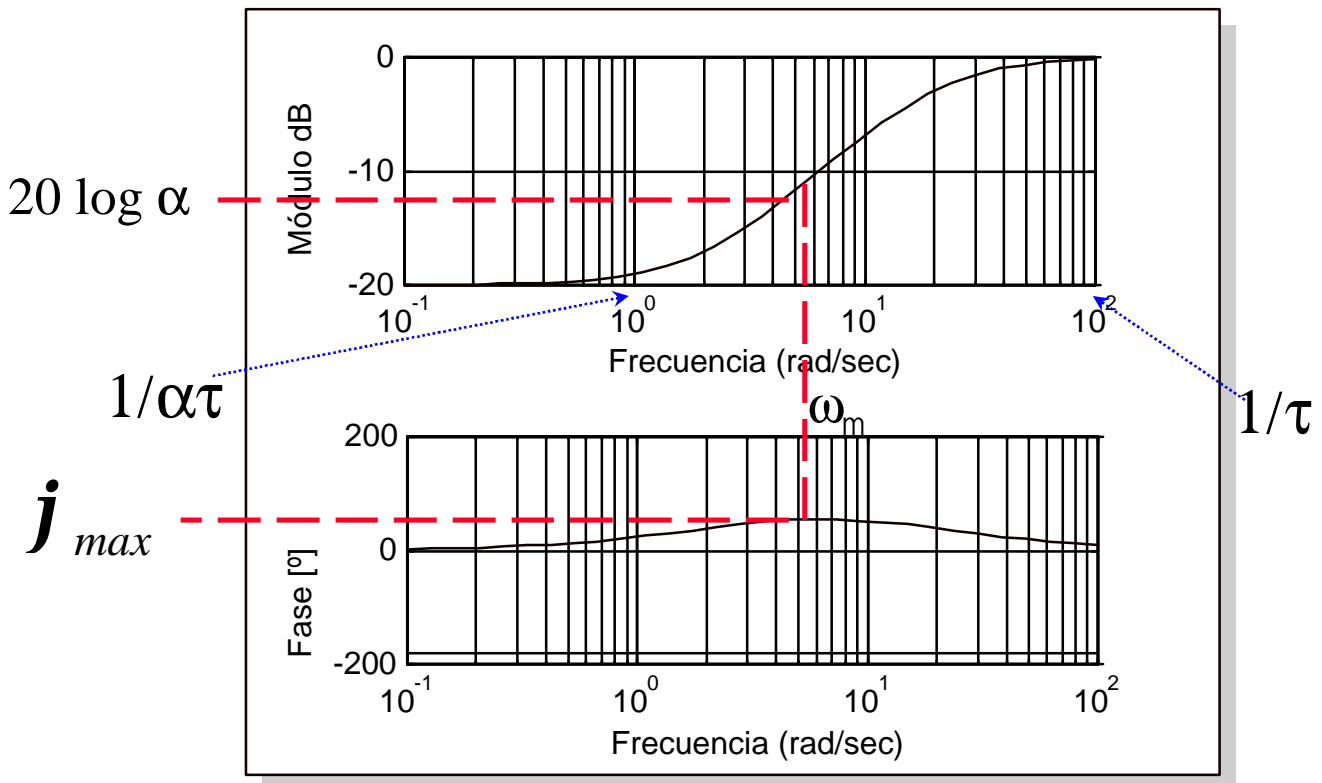


Compensador por avance de fase



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

✓ *cuyo diagrama de Bode es:*



$$\omega_m = \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\text{tg } j_{max} = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$$

$$\text{sen } j_{max} = \frac{a-1}{a+1}$$

▶ *para que la fase sea máxima en el punto de interés se ubican polo y cero en la media geométrica (en el Bode).*

▶ *efecto deseado: aporte de fase*

▶ *efecto secundario: módulo, que se corrige con K_c .*

▶ *se lo emplea para corregir transitorios*



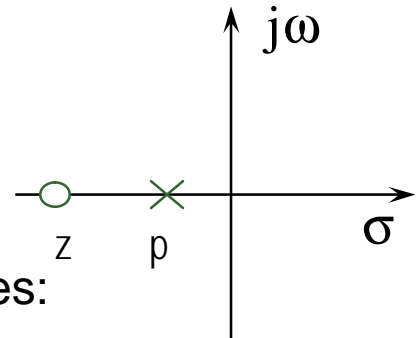
Compensador por retraso de fase



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

□ se definen

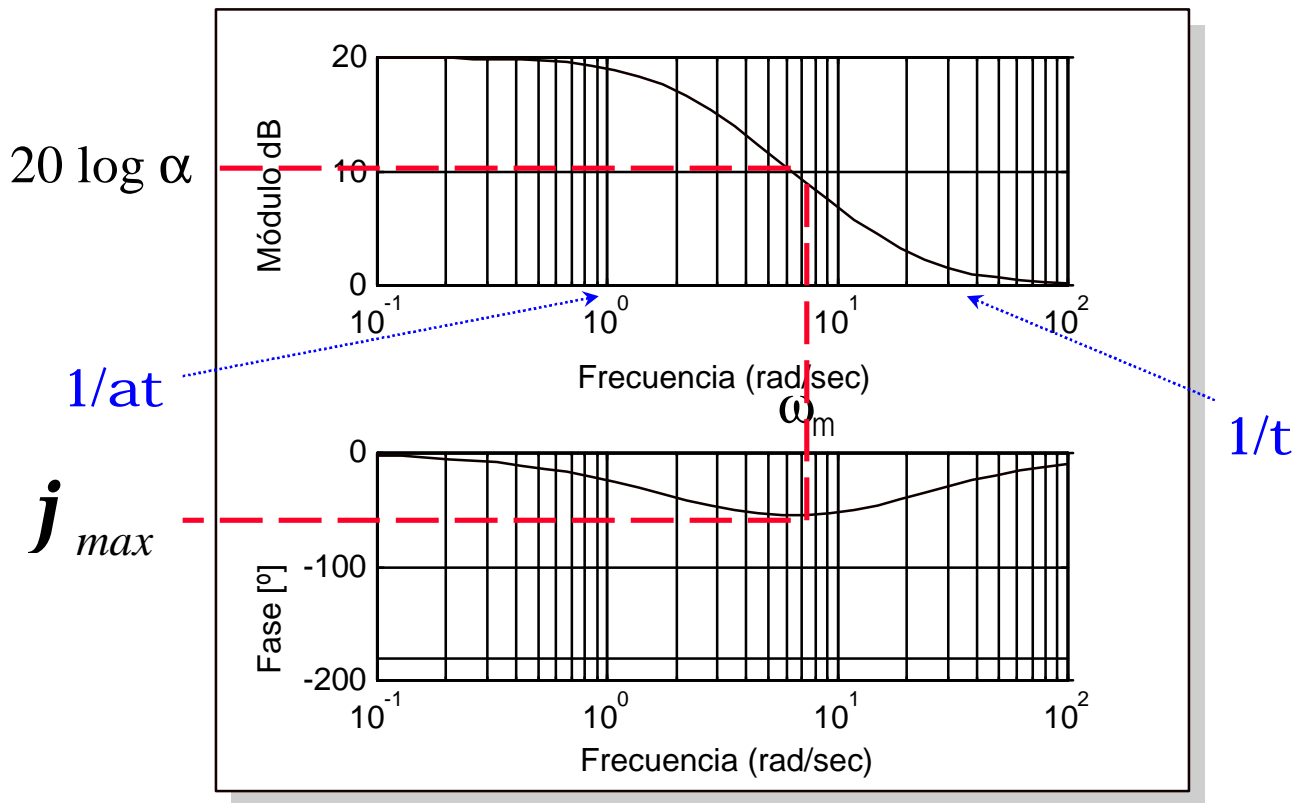
$$\mathbf{a} = \frac{z}{p}; \quad \mathbf{t} = \frac{-1}{z}$$



□ y valen las expresiones siguientes:

$$G_c(s) = K_c \frac{z(s/z + 1)}{p(s/p + 1)}$$

$$G_c(j\omega) = K_c \mathbf{a} \frac{(j\omega t + 1)}{(j\omega a t + 1)}$$





Compensador por retraso de fase



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

- El compensador por retraso de fase:
 - ✓ *efecto deseado: ganancia en un rango de frecuencia*
 - ✓ *efecto secundario: aporte de fase negativa*
 - ✓ *se emplea para compensar errores de precisión (vinculados al estado estacionario)*

➤ **Conclusiones**

- ✓ *ambos son los más simples de proyectar*
- ✓ *sensibles a variaciones*
- ✓ *no aseguran estabilidad absoluta*
- ✓ *suelen usarse combinados (avance y retraso)*
- ✓ *sintetizados en el PID industrial*



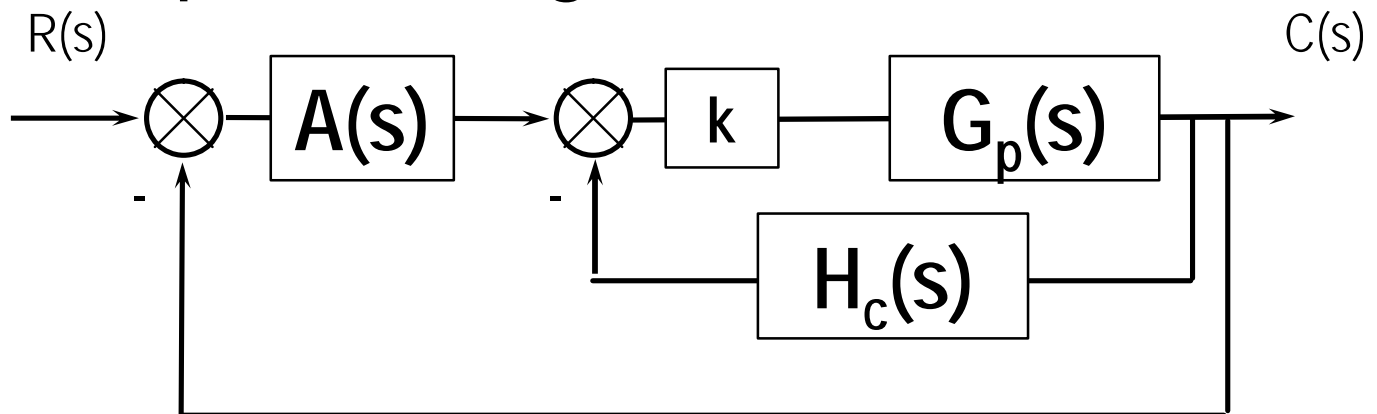
Compensación en el lazo de realimentación



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

- ✓ *requieren menor información del modelo de la planta*
- ✓ *sistemas más robustos*
- ✓ *no existe una técnica específica (con los modelos vistos), sino varios casos*

➤ Arquitectura general:





Compensación en el lazo de realimentación



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

➤ APLICACIONES:

✓ CASO 1: (planta con polos conocidos)

sea:

$$G_p(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+5)}; \quad A(s) = A \text{ (amplificación)}$$

$$G_x(s) = \frac{G_p}{1 + G_p H_c} \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{AG_x}{1 + AG_x} = \frac{\frac{AG_p}{1 + G_p H_c}}{1 + \frac{AG_p}{1 + G_p H_c}}$$

$$H_c = k_d s \text{ (taquigenerador)}$$

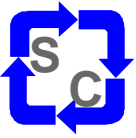
$$\text{con lo que la EC es: } 1 + G_p H_c + AG_p = 0$$

$$1 + \frac{k}{s(s+1)(s+5)} k_d s + A \frac{k}{s(s+1)(s+5)} = 0$$

$$s(s+1)(s+5) + k_d s k + A k = 0$$

$$s(s+1)(s+5) + k_d k (s + A/k_d) = 0$$

$$1 + \frac{k_d k (s + A/k_d)}{s(s+1)(s+5)} = 0$$



Compensación en el lazo de realimentación



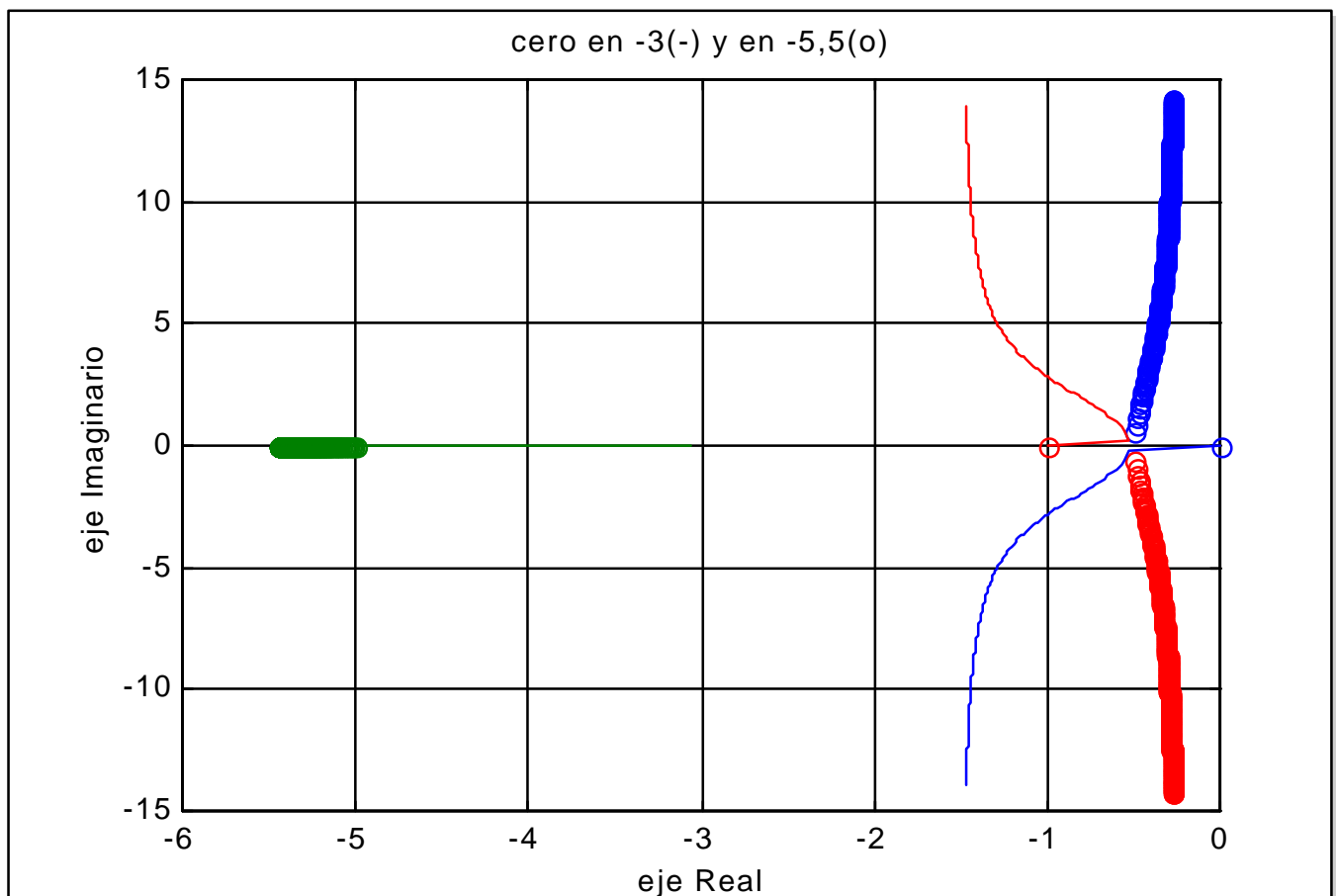
ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

➤ graficando el lugar de raíces:

$$s_0 = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{m} = \frac{-1-5 + A/k_d}{2} = -3 + \frac{A}{2k_d}$$

∴ para $5 < \left| \frac{A}{k_d} \right| < 6$ (línea ooo); para $5 \geq \left| \frac{A}{k_d} \right|$ (línea ____)

✓ contamos con A, k, k_d (grados de libertad) para hacer cumplir las especificaciones

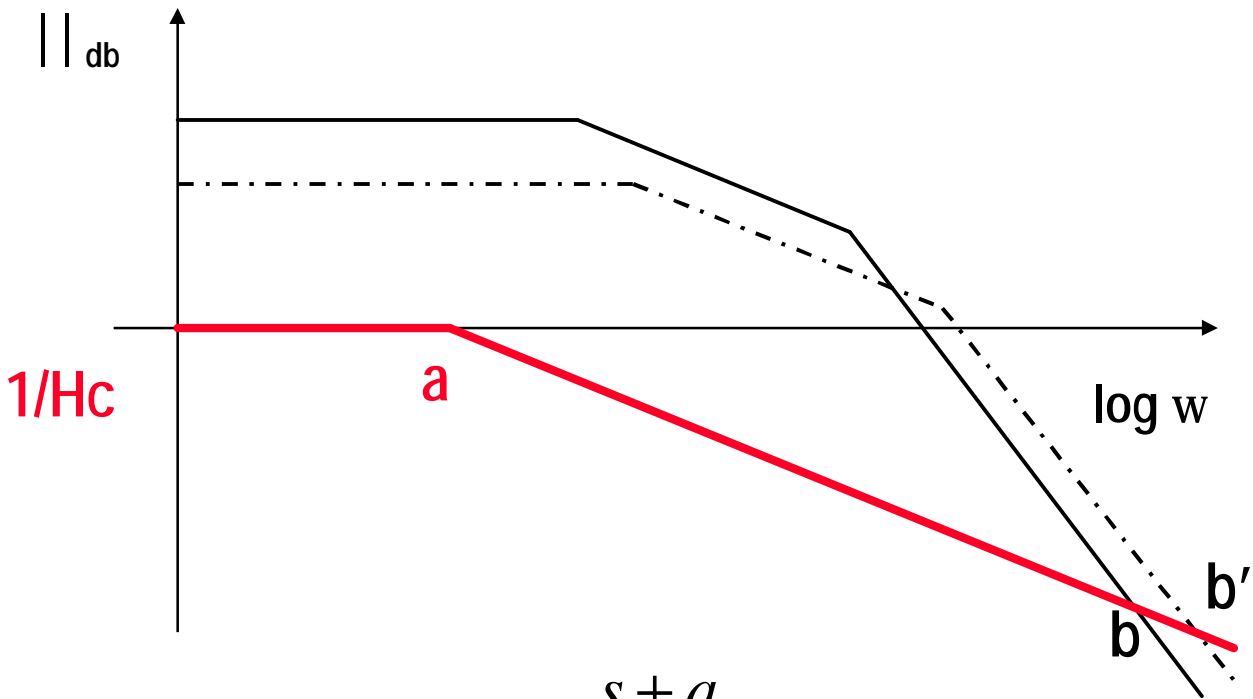




Compensación en el lazo de realimentación

✓ CASO 2: (planta con polos inciertos)

- busco hacer dominantes las singularidades de H_c
- las conozco y las puedo compensar



$$H_c = (s + a); A(s) = \frac{s + a}{s + c}$$

$$T = \frac{G}{1 + GH_c} \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{H_c} \text{ si } |GH_c| \gg 1$$

$$T = G \text{ si } |GH_c| \ll 1$$

✓ la incertidumbre está en b ó b'

- no son dominantes frente a a
- el sistema se vuelve así más robusto, ya que el polo dominante pasa a ser c , que es conocido por diseño
- ¿qué sucede si $H_c=1$?



Compensación en el lazo de realimentación



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

➤ *Conclusiones*

✓ *a favor...*

- disminuye la sensibilidad a perturbaciones y variaciones de parámetros
- mejora las constantes de tiempo
- mejora la estabilidad eligiendo apropiadamente H_c
- mejora la linealidad del amplificador

✓ *...en contra*

- aumenta la cantidad de componentes (complejidad)
- puede inestabilizar si H_c no se diseña correctamente

