

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO DE LA PROVINCIA
DE BUENOS AIRES**

**FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL**

AREA ESTRUCTURAS

**PANDEO DE PLACAS ANULARES
CON ESPESOR VARIABLE**

TESIS DE MAGISTER

TESISTA: Patricia Mónica CIANCIO

DIRECTOR: Jorge Aníbal REYES

**DICIEMBRE
1999**



*Tesis presentada como requerimiento parcial
para acceder al grado académico de
Magister en Tecnología y Construcciones
de Hormigón
de la
Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de
Buenos Aires
Olavarría*

Diciembre 1999

*A mi esposo, Luis y a mis hijos,
Facundo, Leonardo y Miguel; quienes me brindaron
una singular ayuda, para la realización de esta tesis.*

A mis padres.

CONTENIDO

Indice	I
Agradecimientos	III
Notación	IV

CAPITULO 1

Introducción	2
<i>Objetivo Principal</i>	3
<i>Objetivos secundarios</i>	3
<i>Metodología</i>	4
<i>El problema de la estabilidad estructural</i>	5
<i>Pandeo de placas delgadas</i>	7
<i>Hipótesis consideradas</i>	8

CAPITULO 2

Antecedentes	10
---------------------	----

CAPITULO 3

Distribución tensional	16
<i>Variación lineal del espesor</i>	20
<i>Acción de presiones iguales en ambos bordes</i>	20
<i>Acción de presión exterior</i>	22
<i>Acción de presión interior</i>	23
<i>Variación parabólica del espesor</i>	25
<i>Acción de presiones iguales en ambos bordes</i>	26
<i>Acción de presión exterior</i>	27
<i>Acción de presión interior</i>	29
<i>Variación hiperbólica del espesor</i>	31
<i>Acción de presiones iguales en ambos bordes</i>	31
<i>Acción de presión exterior</i>	32

<i>Acción de presión interior</i>	34
-----------------------------------	----

CAPITULO 4

<i>Métodos de resolución</i>	41
<i>Método de los residuos ponderados</i>	42
<i>Método de colocación</i>	43
<i>Método de los mínimos cuadrados</i>	43
<i>Método de Galerkin</i>	44
<i>Método de Rayleigh-Ritz</i>	44
<i>Aplicación del método de Rayleigh-Ritz</i>	47
<i>El método de Rayleigh-Ritz optimizado</i>	52
<i>Aplicación del método de Rayleigh-Ritz optimizado</i>	53

CAPITULO 5

<i>Funcional de energía de deformación elástica</i>	57
<i>Condiciones de borde</i>	61
<i>Obtención del funcional de energía de la placa anular de espesor variable</i>	68
<i>Minimización del funcional</i>	73
<i>Coefficiente λ y determinación de cargas críticas</i>	82

CAPITULO 6

<i>Análisis y Presentación de Resultados</i>	84
<i>Influencia de k, t y p sobre el parámetro λ</i>	93
<i>Influencia del coeficiente de Poisson sobre el parámetro λ</i>	124

CAPITULO 7

<i>Conclusiones</i>	128
----------------------------	------------

CAPITULO 8

<i>Referencias</i>	131
---------------------------	------------

Agradecimientos

En primer lugar, debo agradecer a la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, por el apoyo económico que recibí como becaria de esa Institución; y con la cual inicié las tareas en el ámbito de la investigación. También a nuestra Unidad Académica, porque a través del programa “Mejoramiento de la Calidad, de la Dedicación y Rendimiento de las Plantas Académicas” del Proyecto PROFIDE pude dar continuidad a las investigaciones comenzadas para realizar esta tesis.

Al Ing. Jorge Reyes, quien contribuyó en forma singular a mi formación académica, me guió en el camino ético que debe seguir toda investigación. Le agradezco por la paciencia que tuvo a mis extensos interrogatorios .

Al cuerpo de profesores del Magister, en especial a los Dres. Ings.G. Etse y R. Ambrosini, de los cuales no sólo recibí nuevos conocimientos, sino también su calidez humana.

A mis compañeros de las Areas de Estructuras, Hidráulica y Materiales por el apoyo que me brindaron.

Al personal de biblioteca, y especialmente a Analía por su esmero en conseguir material relacionado con el tema de esta tesis.

En relación a mi ámbito familiar, a mis padres y a mis hermanas por la colaboración que ofrecieron siempre, a todos mis emprendimientos.

A mi esposo, y a mis tres hijos, porque contribuyeron especialmente a que todos mis esfuerzos estuvieran abocados a la realización de esta tesis.

Notación

w : amplitud del desplazamiento

$w_{ap}(r)$: amplitud aproximada del desplazamiento

p : constante especificada para el exponente de la ley de variación del espesor

H : constante

μ : coeficiente o relación de Poisson para placa isótropa

μ_r, μ_θ : coeficiente o relación de Poisson para placa polar ortótropa

A, B : constantes dependientes de las condiciones de borde

r, θ : coordenadas polares

$\alpha_{j-1}, \beta_{j-1}$: coeficientes de la variable adimensional de la función polinómica

A_{j-1} : coeficiente de la combinación de las funciones polinómicas

U : energía total de deformación elástica

h_e : espesor de la placa en el contorno exterior

$h_{(r)}$: espesor de la placa

$N_{(r)}$: fuerza de compresión radial

N_e : fuerza de compresión en el borde exterior

a : magnitud del radio interior

b : magnitud del radio exterior

E_r, E_θ : módulos de Young para placa polar ortótropa en las direcciones radial
y circunferencial

E : módulo de Young para placa isótropa

γ : parámetro indeterminado

λ : parámetro de pandeo

p_i : presión interior

p_e : presión exterior

r_i : radio interior

r_e : radio exterior

r : radio genérico, posición radial

c : radio correspondiente a la discontinuidad del espesor de la placa

$K = \mu_\theta / \mu_r = E_\theta / E_r$

t : relación entre presión interior y presión exterior

k : relación entre radio interior y radio exterior

D : rigidez de la placa a flexión

m : rigidez de vínculo rotacional

k_r : rigidez de vínculo traslacional

σ_a : tensión de anillo de paredes delgadas

$\sigma_\theta, \sigma_{\theta\theta}$: tensión circunferencial

σ_r, σ_{rr} : tensión radial

$\sigma_{r\theta}$: tensión cortante

$x = r / b$: variable adimensional

CAPITULO 1

INTRODUCCION

Introducción

Los sistemas estructurales que se han ido desarrollando a través del tiempo, revelan una tendencia continua hacia las estructuras ligeras y de poco espesor.

En gran parte, esta tendencia se ha visto favorecida por el aumento de materiales de alta resistencia disponibles, y por las presiones de origen técnico y económico para reducir el peso de las estructuras. Los ejemplos más claros del empleo de estructuras ligeras por consideraciones económicas se encuentran en la tecnología aeroespacial. En este caso, el peso ahorrado empleando estructuras más delgadas, se traduce en un aumento en la carga útil de la nave. Consideraciones similares pueden realizarse con respecto a los grandes buques de transporte de minerales o petróleo, en los que unos cascos con paredes menos gruesas representan una mayor carga para el mismo desplazamiento y potencia de los motores.

Si se construyen edificios y puentes con componentes más delgados, el costo de la construcción puede reducirse, en parte porque son menos los dispositivos mecánicos y por otra parte como consecuencia de la reducción de los cimientos. En los edificios, la superficie útil ganada al emplear una estructura ligera puede reforzar la viabilidad económica del edificio. La reducción en el peso del piso y por lo tanto en las cargas laterales permite alguna reducción en el tamaño de los elementos de carga, por ejemplo, en zonas donde las condiciones sísmicas son importantes. En el caso de los puentes más ligeros, otorga la posibilidad de reducciones en el costo de los sistemas portantes, como cables y pilares.

Desde luego, existen factores que no compensan el empleo de estructuras excesivamente delgadas, ya que necesitan una capacitación especial para su diseño, pueden ser difíciles de fabricar, son susceptibles a los daños físicos, al fuego, y a la corrosión. Pero, sea debido a consideraciones económicas, o a consideraciones

exclusivamente técnicas, la tendencia hacia las estructuras de poco peso, delgadas y de alta resistencia, progresa continua y significativamente.

Por ende, la estabilidad estructural se ha convertido en un problema de gran importancia y definitorio en el diseño de estructuras formadas por piezas comprimidas esbeltas o por placas delgadas. La experiencia demostró que en ciertos casos, estas estructuras llegan al colapso, no por soportar altas tensiones, superiores a la resistencia del material, sino debido a la insuficiente estabilidad.

Las placas circulares son elementos estructurales ampliamente utilizadas en muchas aplicaciones de ingeniería estructural, mecánica, electrónica, naval, nuclear, entre otras. Pueden presentarse con agujeros, generalmente concéntricos, espesor variable; en tanto que, en sus condiciones de borde, resulta más real la consideración de vinculación elástica que las clásicas.

Los fines que persigue esta tesis se pueden clasificar en objetivos a saber:

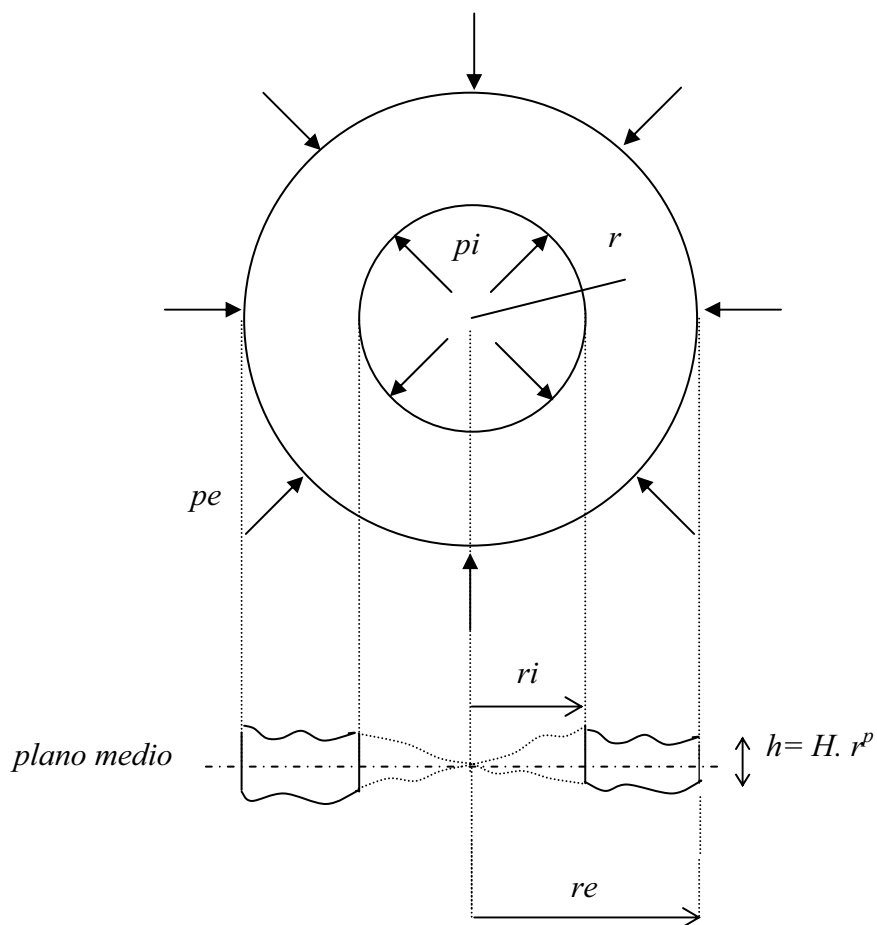
Objetivo principal

- Analizar el pandeo elástico en placas delgadas anulares isótropas con espesor variable en forma continua, bajo distintas condiciones de apoyo y cargas.

Objetivos secundarios

- Analizar el estado tensional en las placas que están en estudio en el tema de esta tesis.
- Estudiar la influencia sobre el pandeo de los parámetros involucrados k (relación entre radios: r_i / r_e), t (relación entre presiones: p_i / p_e), p (exponente de la ley de variación del espesor), μ (coeficiente de Poisson).
- Determinar valores críticos de las fuerzas aplicadas en el plano medio de la placa.
- Analizar resultados y establecer conclusiones.

En esta tesis, se trata de la determinación de cargas críticas en placas delgadas anulares con espesor variable en forma continua, vinculadas en el borde exterior; cuya forma plana de equilibrio bajo cargas de compresión en su plano medio se hace inestable y comienza a experimentar el pandeo elástico. En el esquema siguiente, se muestra la geometría de la placa. En él, se ha omitido la vinculación del borde externo debido a que se considerarán distintas condiciones.



Metodología

Se aplica el método de Rayleigh Ritz optimizado. La aplicación tradicional de esta metodología, consiste en expresar la solución del funcional gobernante en

términos de una combinación lineal de funciones coordenadas, las cuales satisfacen las condiciones esenciales de borde. Minimizando el funcional con respecto a cada uno de los coeficientes de la combinación, se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo. La no trivialidad de la solución conduce a una ecuación polinómica cuyas raíces representan una cota superior de los autovalores del sistema estudiado.

Esta tesis se desarrolla en capítulos, los cuales abarcan los siguientes aspectos:

Primeramente se presenta el problema de la estabilidad estructural, y el tratamiento que se otorga al pandeo de placas. Seguidamente se presenta el estado del conocimiento del tema. Luego se trata el problema de la distribución tensional en placas delgadas anulares de espesor variable sometidas a fuerzas en su plano medio, y aplicadas en sus bordes. Los métodos de resolución, método de Rayleigh-Ritz optimizado, funcional de energía, problemas éstos inherentes al tema tratado, están contenidos en capítulos posteriores; así como la determinación de cargas críticas, resultados y conclusiones.

Por último se incluye un listado con las referencias.

El problema de la estabilidad estructural

Los primeros problemas de estabilidad elástica relativos al pandeo de barras comprimidas, fueron resueltos teóricamente por L. Euler hace unos doscientos años. En aquella época los principales materiales de construcción eran la madera y la piedra. La resistencia, relativamente débil de estos materiales, obligaba a utilizar en las estructuras piezas voluminosas para las que no era de significación primordial la cuestión de la estabilidad elástica. Así, la solución teórica de Euler deducida para

barras esbeltas, permaneció mucho tiempo sin aplicación eficiente. Hasta que en la segunda mitad del siglo pasado, en que comienza la construcción en gran escala de puentes de acero, conduce de manera natural a tipos de estructuras formadas por piezas comprimidas esbeltas y de placas y láminas delgadas. Se investigó extensamente en su faz teórica y experimental, el problema planteado por primera vez por Euler del pandeo de columnas, y se consiguió establecer dentro de qué límites son válidas las fórmulas teóricas. Sin embargo, el pandeo de piezas comprimidas representa solamente un caso particular de la estabilidad elástica.

En los proyectos que se elaboran en la actualidad, de puentes, buques, aviones se encuentra una diversidad de problemas de estabilidad. Así, con la disposición del material en chapas delgadas, como en vigas de alma llena, como en las estructuras de aeroplanos, existe la posibilidad de que resulten inestables bajo la acción de fuerzas que actúan en su propio plano y fallan por pandeo.

El problema del pandeo se caracteriza porque responde a un problema de estado estacionario, ya que la respuesta del sistema bajo consideración no varía con el tiempo.

También es un problema que implica la existencia de más de una solución, por lo que se denomina problema de autovalores (eigenvalues)

Las cargas críticas, no describen la acción del pandeo mismo. Un análisis de la estabilidad considera un cambio en la geometría de la estructura, y como consecuencia, las ecuaciones de equilibrio se basan sobre la geometría deformada bajo carga. Esto es conocido como análisis de segundo orden. Utilizando una ecuación diferencial exacta de la curva elástica para deflexiones grandes, es posible encontrar posiciones de equilibrio más altas que P_{cr} correspondientes a la fuerza aplicada. Esto corresponde a un estudio del comportamiento del postpandeo. Sucede que un pequeño aumento en el valor de P_{cr} , causaría una deflexión muy elevada que

por lo general, el material no puede resistir y los esfuerzos de flexión inducidos, hacen que en la realidad fallen inelásticamente. En la gran mayoría de las aplicaciones de ingeniería, P_{cr} representa la capacidad última de la estructura cargada axialmente o en su plano.

Pandeo de placas delgadas

Para calcular los valores críticos de las fuerzas aplicadas en el plano medio de una placa cuya forma plana de equilibrio se hace inestable, y que comienza a experimentar el pandeo, pueden utilizarse los mismos métodos empleados para el caso de barras comprimidas.

Una manera de obtener los valores críticos de las fuerzas que actúan en ese plano medio, es suponer desde un principio que la placa tiene alguna curvatura inicial o que soporta una cierta carga lateral. Entonces, aquellos valores de las fuerzas situadas en dicho plano medio, que engendran flechas con tendencia a ser infinitamente grandes, son de ordinario valores críticos.

Otra manera de abordar estos problemas de estabilidad, consiste en suponer que la placa sufre un ligero pandeo bajo la acción de fuerzas aplicadas en su plano medio, y calcular luego las intensidades que precisan esas fuerzas para mantener la placa en esa ligera forma de pandeo. Resolviendo la ecuación diferencial de la superficie deformada que gobierna el problema, para las condiciones de contorno dadas, el menor valor para la carga de compresión, determina el valor crítico deseado.

También se puede hacer uso del método energético en la investigación del pandeo de placas. Este método es útil, principalmente en aquellos casos en que se desconoce una solución rigurosa de la ecuación diferencial gobernante, y cuando se pide hallar un valor aproximado de la carga crítica. Al aplicar este método se supone que la placa sometida a tensiones por fuerzas que se ejercen en su plano medio

experimenta alguna flexión lateral compatible con las condiciones de contorno. Esta débil flexión puede originarse sin extensión de ese plano medio y solamente se necesita considerar la energía de flexión y el trabajo correspondiente efectuado por las fuerzas que actúan en la nombrada superficie media. Si el trabajo realizado por estas fuerzas es menor que el trabajo de deformación por flexión, para cada forma posible de pandeo lateral, la forma plana de equilibrio de la placa es estable. Si ese mismo trabajo, llega a ser mayor que la energía de flexión para cualquier forma de la deformación lateral, la placa queda en situación inestable y acontece el pandeo.

En el caso que sean iguales, trabajo de las fuerzas y energía de deformación, se está en el límite entre estable e inestable. Esto es válido en estructuras elásticas y conservativas.

Hipótesis consideradas

Dado que el interés de esta tesis radica en identificar las condiciones críticas y encontrar la carga crítica del sistema en estudio, se trabajó bajo las siguientes hipótesis:

- Pequeñas deformaciones, del orden del espesor.
- Estructura geoméricamente perfecta.
- Material elástico, isótropo y homogéneo.
- Placas delgadas, espesor pequeño.

CAPITULO 2

ANTECEDENTES

Antecedentes

En este capítulo se mencionan los trabajos a los cuales se tuvo acceso, sobre el pandeo en placas y no pretende ser limitativo.

Se puede decir que, el tema mencionado ha merecido el interés de diversos investigadores. Se analiza regularmente en conjunto con los problemas de vibraciones. Desde el trabajo pionero de Bryan¹, sobre estabilidad de placas planas, distintos aspectos tales como diferentes propiedades en el material, variación del espesor como también distintas condiciones de borde se encuentran desarrollados en la literatura técnica. Timoshenko² plantea la solución exacta de la placa circular delgada con espesor uniforme.

Otros estudios relacionados con el tema de pandeo en placas circulares han sido tratados por distintos autores. Srinivas y Rao (1970), demostraron que la influencia del orden de la deformación por corte, en problemas de pandeo de placas homogéneas, era despreciable, por lo cual la teoría de la placa de primer orden de deformación por corte, teoría de Reissner (1945) y Mindlin (1951), fue considerada suficiente para realizar sus estudios. Jain³, realizó estudios sobre la frecuencia natural de placas circulares de espesor variable bajo la acción de fuerzas en su plano, según la teoría clásica de placas, utilizando el método de Frobenius. En 1973 Pardoén, utilizó el método de los elementos finitos para estudiar vibraciones y pandeo en placas circulares axisimétricas. Soni y Rao⁴, trataron las vibraciones libres en placas anulares axisimétricas con espesor variable empleando el método de Chebyshev. Hacia 1975

¹ G.H. Bryan. “On the stability of a plane plate under thrust in its own plane with application to the buckling of the side of a ship”. Proc., London Mathematics Society, **22**, pp. 54-67. (1891).

² S. Timoshenko. “Teoría de la Estabilidad Elástica”. Editorial Ediar, p. 399. (1961).

³ R. K. Jain. “ Vibrations of circular plates of variable thickness under an inplane force”. Journal of Sound and Vibration, **23** (4), pp. 407-414. (1972).

⁴ S. R. Soni and C. L. Amba-Rao. “Axisymmetric vibrations of annular plates of variable thickness”. Journal of Sound and Vibration, **38** (4), pp.465-473. (1975).

Ramaiah, Vijayakumar⁵, aplicando el método de Rayleigh-Ritz obtuvieron valores de frecuencias en placas anulares con perfil de espesor lineal.

D. R. Avalos y P. A. A. Laura⁶, resolvieron el problema de vibraciones de placas anulares ortótropas con vinculación elástica, aplicando el método de Galerkin, para generar el determinante de frecuencias.

En la última década Kanaka Raju y Venkateswara Rao⁷ y Cheng y Doong (1984) realizaron estudios sobre pandeo elástico de placas gruesas circulares.

Dumir (1985), abordó el problema del pandeo en placas circulares utilizando el método de colocación.

En 1988, Raju y Rao, repiten el análisis de pandeo de la placa circular utilizando el método de los elementos finitos.

Otros estudios sobre el tema incluyen el uso de teorías de placas de orden superior, con la incorporación de las deformaciones por corte, tales como los realizados por Chen, Hwang (1988), Chen et. al. (1989) y Senthilnathan (1989).

Wang, Xiang, Kitipornchai, Liew⁸, estudiaron el pandeo de placas gruesas circulares cargadas radialmente y soportadas por anillos concéntricos simplemente apoyados o empotrados, basados en el método energético aproximado de Rayleigh-Ritz. C. M. Wang y L. Wang y K. M. Liew⁹, estudiaron las vibraciones y el pandeo de una clase de placas, cuya forma es definida por una función superelíptica. Las

⁵ G. K. Ramaiah, K. Vijayakumar. "Vibrations of annular plates with linear thickness profiles". Journal of Sound and Vibration, **40** (2), pp. 293-298. (1975).

⁶ D. R. Avalos, P. A. A. Laura. "Transverse vibrations of polar orthotropic, annular plates elastically restrained against rotation along the edges". Journal of Fibre Science and Technology, **14**, pp. 59-67. (1981).

⁷ K. Kanaka Raju and G. Venkateswara Rao. "Post-buckling analysis of moderately thick elastic circular plates". Journal of Applied Mechanics, **50** (2), pp. 468-470. (1983).

⁸ C. M. Wang, Y. Xiang, S. Kitipornchai, K. M. Liew. "Axisymmetric buckling of circular Mindlin plates with ring supports". Journal of Structural Engineering, Vol. **119**, No. **3**, pp. 782-793. (1993).

⁹ C. M. Wang, L. Wang and K. M. Liew. "Vibration and buckling of super elliptical plates". Journal of Sound and Vibration, **171** (3), pp. 301-314. (1994).

soluciones se obtuvieron utilizando el método de Rayleigh-Ritz pb-2, dado que la función básica de Ritz se definió como el producto de dos polinomios bidimensionales.

C. W. Lim y K. M. Liew ¹⁰, abordaron el estudio de las vibraciones libres de placas perforadas con esquinas redondeadas, utilizando el método de Ritz con un conjunto de polinomios generados ortogonalmente, los cuales utilizaron como funciones admisibles. Esas funciones generadas ortogonalmente son polinomios bidimensionales. Este tipo de placas recibe el nombre de superelípticas.

N. R. Naidu, G. V. Rao y K. Raju¹¹, aplicando elementos finitos, resuelven el problema de postpandeo en placas gruesas o moderadamente gruesas con bordes elásticamente restringidos, sometidas a cargas de compresión y variación de temperatura uniforme.

Sobre la base de consideraciones tridimensionales de la elasticidad para el pre-pandeo y análisis perturbado, Jianquiao Ye (1995)¹², trató el problema de pandeo axisimétrico de placas circulares homogéneas y laminadas, utilizando una formulación recursiva.

Bambill, Reyes y Laura¹³, estudiaron las vibraciones axisimétricas de placas anulares de espesor no uniforme, utilizando el método de Rayleigh-Ritz optimizado. U. S. Gupta y A. H. Ansari ¹⁴, obtuvieron parámetros de carga de pandeo y frecuencias para placas ortótropas circulares de espesor variable en forma lineal con bordes

¹⁰ C. W. Lim and K. M. Liew. "Vibrations of perforated plates with rounded corners". Journal of Engineering Mechanics, Vol **121**, No. **2**, pp. 203-211. (1995).

¹¹ N. Rajasekhara Naidu, G. Venkateswara Rao, and K. Kanaka Raju. "Postbuckling of moderately thick circular plates with edge elastic restraint". Journal of Engineering Mechanics, Vol. **120** (**10**), pp. 2232-2238. (1995).

¹² Yianquiao Ye. "Axisymmetric buckling of homogeneous and laminated circular plates". Journal of Structural Engineering. (1995).

¹³ D. V. Bambill, J. A. Reyes and P. A. A. Laura. "A note on axisymmetric vibrations of annular plates of non-uniform thickness". Journal of Sound and Vibration, **191** (**4**), pp. 584-589. (1995).

¹⁴ U. S. Gupta and A. H. Ansari. "Asymmetric vibrations and elastic stability of polar orthotropic circular plates of linearly varying profiles". Journal of Sound and Vibration, Vol. **215**, No. **2**, pp. 231-250. (1998).

elásticamente restringidos, empleando el método de Ritz, con funciones basadas sobre la deflexión de dichas placas; sujetas a fuerzas hidrostáticas en el plano.

H. Matsunaga¹⁵, teniendo en cuenta las deformaciones por los efectos de corte y por cambios de espesor, determina cargas de pandeo y los modos de pandeo de placas delgadas, sujetas a tensiones en el plano. Distintas teorías aproximadas aplicó para resolver los problemas de valores propios de placas gruesas.

En general estudios sobre placas anulares se realizaron en las últimas dos décadas. En nuestro país realizaron una importante contribución Laura et. al^{16, 17, 18, 19} tratando el tema en conjunto con vibraciones, con distintas condiciones de borde y espesor variable con discontinuidad, aplicando el método de Rayleigh-Ritz optimizado. Una excelente fuente sobre el tema se da en la referencia²⁰. Lord Rayleigh sugirió la inclusión de un parámetro exponencial indeterminado con respecto al cual se optimiza.

Este método fue utilizado, en forma independiente, por los profesores Charles W. Bert²¹ y Robert Schmidt²², conduciendo a valores más precisos. La utilización del método para optimizar autovalores superiores fue propuesta por Laura et.al²³

¹⁵ H. Matsunaga. "Buckling instabilities of thick elastic plates subjected to in-plane stress". Journal Eng., Comut & Tech., **62**, pp. 205-214. (1997).

¹⁶ P. A. A. Laura, J. C. Paloto and R. D. Santos. "A note on the vibration and stability of a circular plate elastically restrained against rotation". Journal of Sound and Vibration, **41**, 177-180. (1975).

¹⁷ D. R. Avalos and P. A. A. Laura. "A note on transverse vibrations of annular plates elastically restrained against rotation along the edges". Journal of Sound and Vibration, **66** (1), 63-67. (1979).

¹⁸ P. A. A. Laura, G. M. Ficcadenti and S. I. Alvarez. "Effect of geometric boundary disturbances on the natural frequencies and buckling loads of vibrating clamped circular plates". Journal of Sound and Vibration, **126**, 67-72. (1988).

¹⁹ P. A. A. Laura, R. H. Gutiérrez, V. Sonzogni and S. Idelsohn. "Buckling of circular, annular plates of non-uniform thickness". Institute of Applied Mechanics, **96** (6). (1996).

²⁰ P. A. A. Laura, L. Ercoli and R. Gutierrez. "Optimized Rayleigh-Ritz Method". Institute of Applied Mechanics. Monograph, pp. 34-95. (1995).

²¹ C. W. Bert. "Improved technique for estimating buckling loads". A.S.C.E. Journal of Engineering Mechanics, **110**, pp.1655-1665. (1984).

²² R. Schmidt. "A way of estimating lower bounds for eigenvalues in buckling and vibrations problems". Industrial Math., **33**, pp. 163-167. (1983).

²³ P. A. A. Laura y V. H. Cortínez. "Optimization of eigenvalues when using the Galerkin method". Journal Amer. Inst. Chem. Engineers, **32**, pp. 1025-1026. (1986).

En cuanto a placas anulares anisótropas de espesor variable, Carl Dyka y John Carney III²⁴ han desarrollado una solución exacta para placas anulares ortótropas de espesor variable, y con vigas de borde, dando valores de cargas críticas.

Sonzogni et. al²⁵, obtuvieron resultados para el problema de vibración libre en la placa circular con orificio concéntrico y espesor variable discontinuo. Emplearon el método de los elementos finitos y efectuaron la comparación con el método de Rayleigh –Ritz optimizado.

P. A. A. Laura et. al²⁶ presentan parámetros de pandeo para placas circulares y anulares con espesor discontinuo y continuo variando linealmente, utilizando la expresión de Lamé para la tensión radial resultante. Realizan una comparación de resultados obtenidos con la aplicación del método de Rayleigh-Ritz optimizado y con un código que emplea elementos finitos.

²⁴ C. T. Dyka and J. F. Carney III. “*Vibrations of annular plates of variable thickness*”. Journal of the Mechanics Engineering. A.S.C.E., Vol. **105**- EM3, pp. 361-370. (1979).

²⁵ V. E. Sonzogni, D. V. Bambill, R. H. Gutierrez, D. R. Avalos, H. A. Larrondo y P. A. A. Laura. “*Vibración de placas con orificios y espesor variable*”. X Jornadas Argentinas del Hormigón Pretensado, XV Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, Tomo **II**, pp. 213-229. (1996).

²⁶ P. A. A. Laura, R. H. Gutierrez, V. Sonzogni and S. Idelsohn. “*Buckling of circular, annular plates of non-uniform thickness*”. Journal of Ocean Engng., Vol. **24**, No.1, pp. 51-61. (1997).

CAPITULO 3

DISTRIBUCION TENSIONAL

Distribución Tensional

Es de uso común en la obtención del funcional de energía, utilizar las expresiones de tensiones dadas por Lamé¹ para placas anulares de espesor constante. Por lo cual para el caso de espesor variable con continuidad, los autores dividen al perfil de la placa en tramos discontinuos de espesor constante, como una manera de efectuar la aproximación al perfil real.

En este trabajo, se aplica en el funcional la expresión real de las tensiones, derivadas de² que considera variación continua del espesor.

La teoría de la elasticidad permite determinar el estado tensional en estructuras que presentan una sección transversal de forma cualquiera.

En el caso de placas anulares con espesor constante, Lamé¹ planteó la solución del estado tensional y sus deformaciones; un análisis detallado del tema puede encontrarse en los textos clásicos de elasticidad, entre ellos Belluzzi³, Timoshenko⁴. En el caso de placas anulares de espesor variable, la solución es motivo del ámbito de la investigación.

En el trabajo de Carl Dyka y John Carney III², sobre vibraciones, se obtienen, entre otros valores, las cargas de pandeo en placas anulares ortótropas, con espesor variable, comprimidas radialmente y reforzadas con vigas en los bordes interior y exterior respectivamente. Estos autores presentan la solución exacta para las placas mencionadas, para condiciones de simetría de carga. En el proceso de solución,

¹ G. Lamé. "*Leçons sur la Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*". París. (1852).

² C.T. Dyka and J. F. Carney III. "*Vibrations of annular plates of variable thickness*". Journal of the Mechanics Engineering, A.S.C.E., Vol. **105-EM3**, pp. 361-370. (1979).

³ O. Belluzzi. "*Ciencia de la Construcción*". Tomo III, Ed. Aguilar. (1970).

⁴ Timoshenko, Goodier. "*Teoría de la Elasticidad*". Ed. Urmo. (1968).

involucran un paso inicial: el planteo del problema plano para obtener las tensiones, y el campo de desplazamientos de la placa anular.

Presentan la solución de la ecuación diferencial, en la que aparecen dos constantes que determinan a partir de la condición de continuidad entre las vigas que circundan ambos bordes, interior y exterior, y la placa.

La placa anular tiene un espesor cuya variación está dada por:

$$h(r) = H \cdot r^p, \quad H \text{ y } p \text{ constantes} \quad (1)$$

Obtienen, para las tensiones radiales σ_{rr} , circunferenciales $\sigma_{\theta\theta}$, y cortantes $\sigma_{r\theta}$ las siguientes expresiones:

$$\sigma_{rr} = \frac{A \cdot E_{\theta} \cdot (x_1 + \mu_{\theta})}{K^2 - \mu_{\theta}^2} \cdot r^{(x_1-1)} + \frac{B \cdot E_{\theta} \cdot (x_2 + \mu_{\theta})}{K^2 - \mu_{\theta}^2} \cdot r^{(x_2-1)} \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{A \cdot E_{\theta} \cdot (K^2 + x_1 \mu_{\theta})}{K^2 - \mu_{\theta}^2} \cdot r^{(x_1-1)} + \frac{B \cdot E_{\theta} \cdot (K^2 + x_2 \mu_{\theta})}{K^2 - \mu_{\theta}^2} \cdot r^{(x_2-1)} \quad (3)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (4)$$

Donde

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4 \cdot (K^2 - p \cdot \mu_{\theta})}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4 \cdot (K^2 - p \cdot \mu_{\theta})}}{2} \quad (5)$$

A, B : Constantes

E_r, E_{θ} = Módulos de Young para la placa polar ortótropa, en las direcciones radial y circunferencial

μ_r, μ_{θ} = relaciones de Poisson para placa polar ortótropa

$$K^2 = \mu_{\theta} / \mu_r = E_{\theta} / E_r$$

r = posición radial

En esta tesis, y sobre la base de estos estudios, para placa anular isótropa, las ecuaciones (2) y (3), se pueden expresar :

$$\sigma_{rr} = \frac{A \cdot E \cdot (x_1 + \mu)}{1 - \mu^2} \cdot r^{(x_1-1)} + \frac{B \cdot E \cdot (x_2 + \mu)}{1 - \mu^2} \cdot r^{(x_2-1)} \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{A \cdot E \cdot (1 + x_1 \mu)}{1 - \mu^2} \cdot r^{(x_1-1)} + \frac{B \cdot E \cdot (1 + x_2 \mu)}{1 - \mu^2} \cdot r^{(x_2-1)} \quad (7)$$

Donde :

E = Módulo de Young para placa isotrópica

μ = coeficiente de Poisson para placa isotrópica

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4 \cdot (1 - p \cdot \mu)}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4 \cdot (1 - p \cdot \mu)}}{2} \quad (8)$$

Para nuestro caso el valor de $K^2 = E_\theta / E_r$ es 1, por tratar casos de placas isótropas.

Si se plantean las condiciones de borde naturales, esto es, para un radio coincidente con el radio exterior, la tensión radial debe ser igual a la presión exterior; y para un radio igual al radio interior, la tensión radial debe ser igual a la presión interior:

$$\sigma_r \Big|_{r=r_i} = -p_i \quad (9)$$

$$\sigma_r \Big|_{r=r_e} = -p_e \quad (10)$$

Con estas dos condiciones aplicadas a la ecuación (6), respectivamente, se obtiene un sistema de dos ecuaciones, cuyas incógnitas son A y B .

De esta manera se obtiene:

$$A = \frac{(1 - \mu^2)}{E \cdot (x_1 + \mu)} \cdot \frac{(p_i - p_e \cdot k^{(x_2-1)})}{(k^{(x_2-x_1)} - 1)} \cdot \frac{1}{b^{(x_1-1)}} \quad (11)$$

$$B = \frac{(1 - \mu^2)}{E \cdot (x_2 + \mu)} \cdot \frac{(pe \cdot k^{(x_1-1)} - pi)}{(1 - k^{(x_1-x_2)})} \cdot \frac{1}{b^{(x_2-1)}} \quad (12)$$

Reemplazando en (6) y (7), las expresiones dadas en (11) y (12) se obtiene:

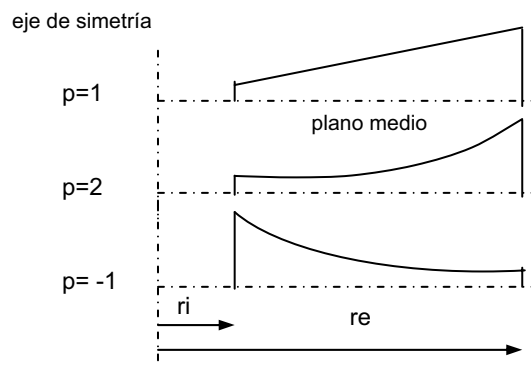
$$\sigma_r = \frac{(pi - pe \cdot k^{(x_2-1)})}{(k^{(x_2-x_1)} - 1)} \cdot \frac{r^{(x_1-1)}}{b^{(x_1-1)}} + \frac{(pe \cdot k^{(x_1-1)} - pi)}{(1 - k^{(x_1-x_2)})} \cdot \frac{r^{(x_2-1)}}{b^{(x_2-1)}} \quad (13)$$

$$\sigma_\theta = \frac{(pi - pe \cdot k^{(x_2-1)})}{(k^{(x_2-x_1)} - 1)} \cdot \frac{(1 + \mu \cdot x_1)}{(\mu + x_1)} \cdot \frac{r^{(x_1-1)}}{b^{(x_1-1)}} + \frac{(pe \cdot k^{(x_1-1)} - pi)}{(1 - k^{(x_1-x_2)})} \cdot \frac{(1 + \mu \cdot x_2)}{(\mu + x_2)} \cdot \frac{r^{(x_2-1)}}{b^{(x_2-1)}} \quad (14)$$

Las ecuaciones (13) y (14), determinan el estado tensional buscado.

En estas ecuaciones *pe* indica presión exterior, *pi* presión interior; *b* es el radio exterior y *a* el radio interior. La relación entre radios es $k = ri / re = a / b$.

Con el fin de visualizar el comportamiento tensional en placas anulares con espesor variable se presentan gráficos en los cuales las abscisas representan la variable adimensional $x = r / b$, y las ordenadas las tensiones, radiales y circunferenciales, para distintos valores de *k*. El estado de carga también se fue variando, asignándole un valor unitario a las presiones actuantes, y 0,3 a μ . Este esquema se siguió para distintas leyes de variación del espesor, las cuales se obtuvieron de asignar en la variación del espesor, $h(r) = H \cdot r^p$, 1, 2 y -1, respectivamente al exponente *p*. Esto implica que cuando $p = 1$, $h = H \cdot r$, implica variación lineal del espesor, cuando $p = 2$, $h = H \cdot r^2$, variación parabólica (con la convexidad hacia el plano medio de la placa) y cuando $p = -1$, $h = H \cdot r^{-1}$, variación hiperbólica, según se esquematiza en la Figura 1.

**Figura 1**

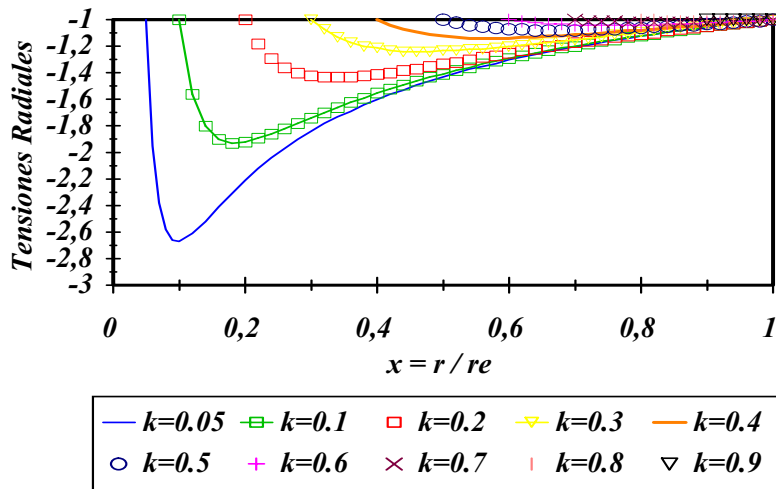
Variación lineal del espesor

Acción de presiones iguales en ambos bordes

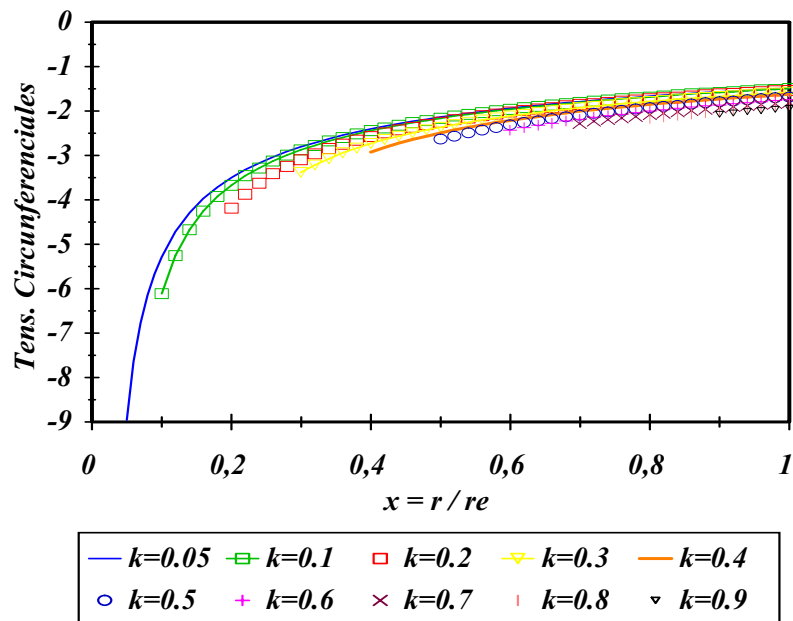
En este apartado se muestra el análisis tensional efectuado, cuando en ambos contornos actúan presiones iguales. La variación del espesor sigue una ley lineal, ($p = 1$).

Es de destacar que cuando la placa anular tiene un agujero pequeño comparado con el radio exterior, la tensión radial mayor se presenta, como se observa en el gráfico 1 a) para un valor de $x = r / r_e$ de 0,2, muy cercano a la discontinuidad que representa el agujero en la sección transversal. Esta variación brusca se va atenuando a medida que el agujero representa un valor más significativo; siendo la distribución para una relación k de 0,9 prácticamente constante.

**Gráfico 1. Estado Tensional bajo
compresión en ambos bordes ; $p=1$**



a)



b)

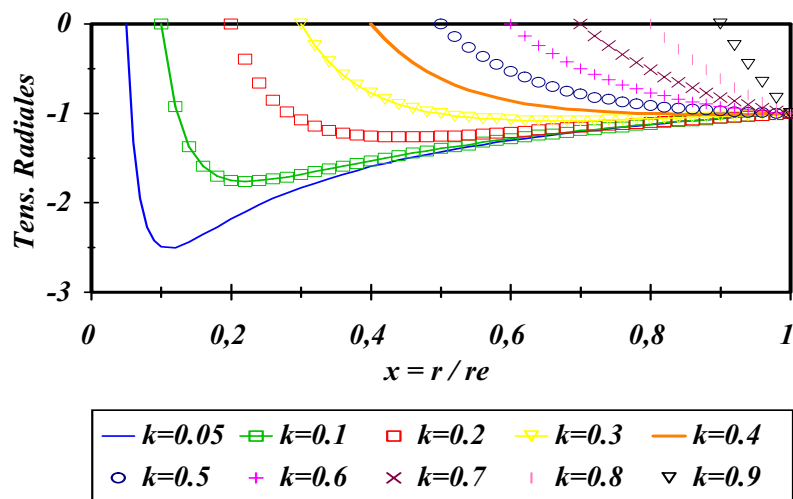
Con referencia a las tensiones circunferenciales, del gráfico 1 b), el valor más alto de tensión se encuentra para todos los casos en el borde interior y con valores de

hasta 9 veces la presión exterior, cuando la relación entre radios k es 0,05, tal es el problema del efecto de entalladura y concentración de tensiones. Para las restantes relaciones k , se observa una variación similar, pero cuando k es del orden de 0,8 y mayor se torna de distribución casi constante.

Acción de presión exterior

Si hay sólo presión exterior, y según el gráfico 2 a), para tensiones radiales, se presenta un pico de tensiones en la zona cercana al radio interior y de aproximadamente 2,5 veces la presión actuante, nuevamente esto es más marcado cuanto menor es la relación k . Para un valor $k=0,5$ las tensiones sobre cualquier radio no superan el valor de la presión actuante, y la variación se presenta gradual.

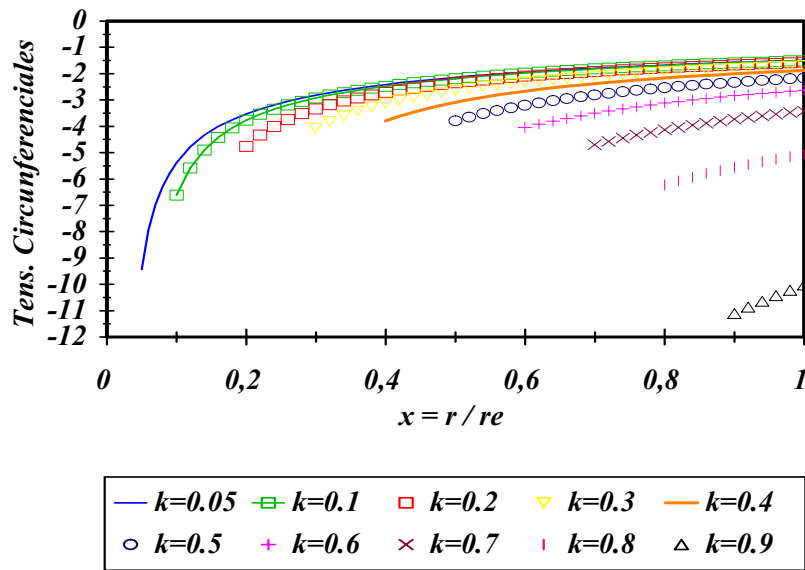
Gráfico 2. Estado Tensional bajo compresión sobre borde exterior ; $p=1$



a)

entre ambos bordes. En cuanto a las tensiones circunferenciales, gráfico 2 b), es interesante resaltar que en estos casos cuando la relación k entre radios va aumentando, se va produciendo un incremento en las tensiones especialmente para

Gráfico 2. (Continuación)



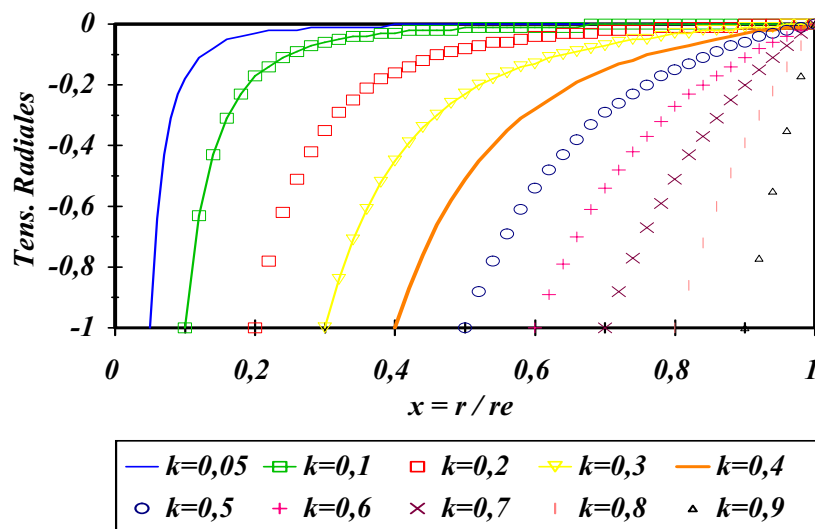
b)

$k > 0,8$ donde se ve que adopta valores de hasta 11 veces la presión exterior sobre el radio interior.

Acción de presión interior

Cuando sólo se tiene presión interior, las tensiones radiales no presentan

Gráfico 3. Estado Tensional bajo compresión sobre borde interior; $p=1$

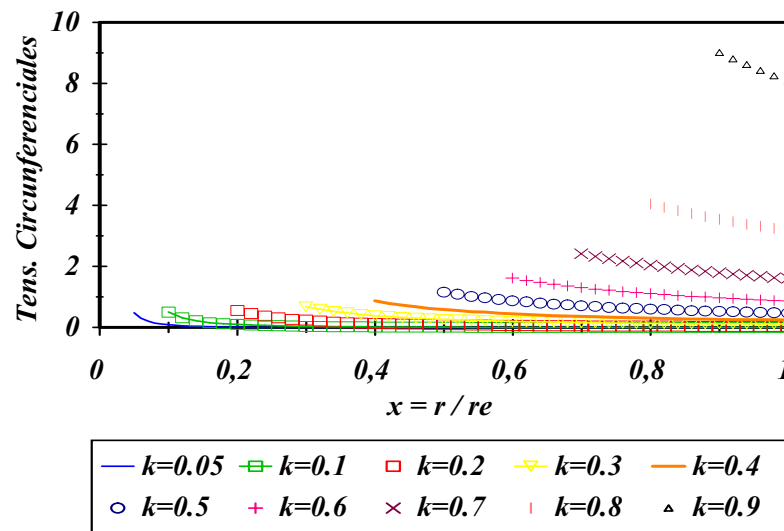


a)

picos de tensión, gráfico 3 a), o sea valores que superen a la presión que actúa. El valor de tensión radial máxima que se produce en el radio interior, se disipa rápidamente mucho antes de avanzar hacia el radio exterior, para relaciones pequeñas de k .

Para relaciones k comprendidas entre 0,3 y 0,7, se van atenuando hacia el radio exterior más gradualmente, en comparación con lo mencionado en el párrafo anterior.

Gráfico 3. (Continuación)



b)

En cambio las tensiones circunferenciales, gráfico 3 b), son alrededor de 8 veces la presión interior en ambos bordes cuando $k = 0,9$, y son tensiones de tracción. Mientras que tienen un valor casi nulo cuando el agujero es muy pequeño ($k = 0,05$).

Comparando los gráficos 1 a), 2 a) y 3 a), de tensiones radiales, se observa que las tensiones de mayor magnitud se dan para el caso de compresión en ambos bordes. Esto se puede interpretar por superposición de la acción, por un lado del estado tensional correspondiente a presión exterior y por el otro al de compresión sobre el contorno interior. O sea, cuando actúa presión exterior, las tensiones radiales

que equilibran esa presión, son de compresión y tienen un pico para un valor de radio cercano al interior, ya que la altura va disminuyendo en esa dirección, y rápidamente decrece hasta anularse sobre el radio interior. Cuando es interior la presión actuante, las tensiones radiales de compresión van disminuyendo hacia el radio exterior, sin picos de tensión, la altura aumenta en esa dirección. Como resultado, sumando estas acciones, o sea actúan en simultáneo sobre ambos contornos, se incrementa el pico de tensión cercano al borde interior, y tanto sobre el radio interior, como sobre el exterior igualan a las presiones que allí actúan.

En cuanto a las tensiones circunferenciales, gráficos 1 b), 2 b) y 3 b), con un análisis análogo, los resultados muestran que las magnitudes mayores se dan para el caso en que sólo actúa presión exterior, y se producen sobre el borde interior; para el cual se da la altura menor, por lo cual las tensiones resultantes para la acción de presiones en ambos bordes adoptan los valores altos sobre ese borde, pero disminuídos por la acción de las tensiones circunferenciales de tracción que se originan cuando actúa sólo la presión interior, para la cual también los valores mayores se ubican sobre el radio interior, coincidiendo con la menor altura.

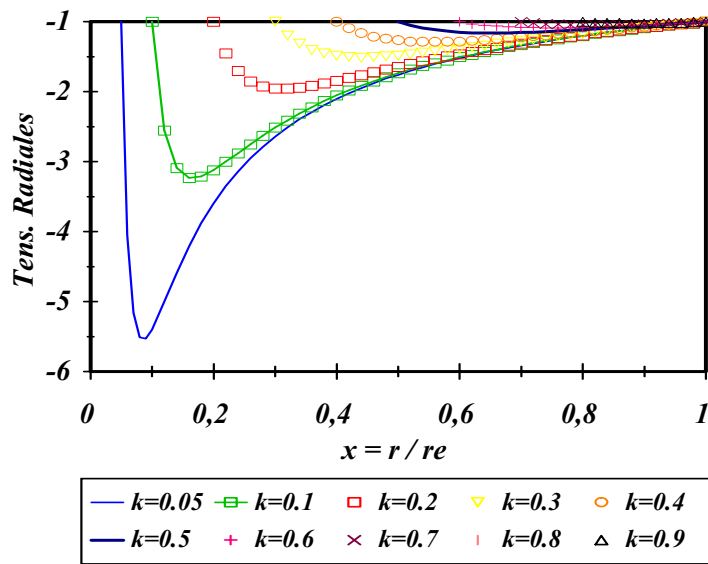
Variación parabólica del espesor

Cuando la variación del espesor sigue una ley parabólica, esto es, asignando a p un valor igual a 2, los picos de tensión son más pronunciados que cuando la variación del espesor es lineal y se producen en zonas bien cercanas al borde interior; esta diferencia es bien notable en los valores de las tensiones circunferenciales y cuando el caso estudiado es una placa anular de pequeño agujero por efecto de entalladura.

Acción de presiones iguales en ambos bordes

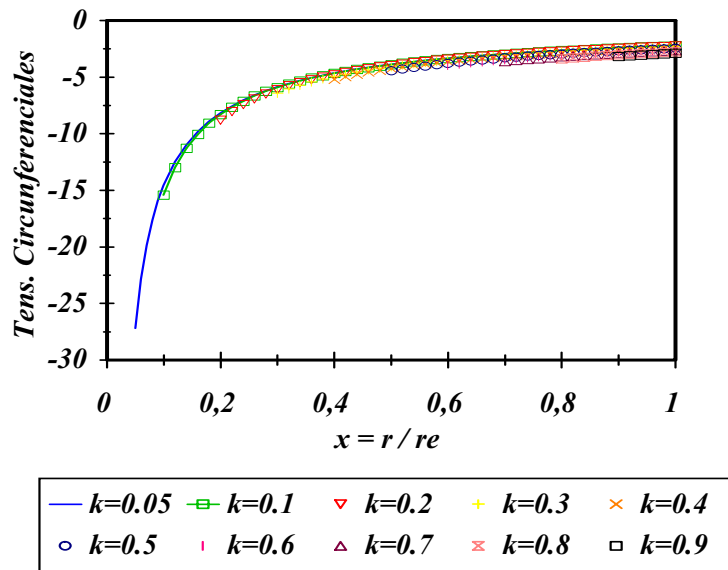
Cuando las presiones actuantes en ambos bordes, interior y exterior, son iguales, la variación de las tensiones radiales, gráfico 4 a), presentan un pico de tensión de hasta alrededor 5,5 veces la presión actuante y en zonas muy cercanas al borde interior, cuando $k = 0,05$.

Gráfico 4. Estado Tensional bajo compresión sobre ambos bordes ; $p=2$



a)

Gráfico 4. (Continuación)



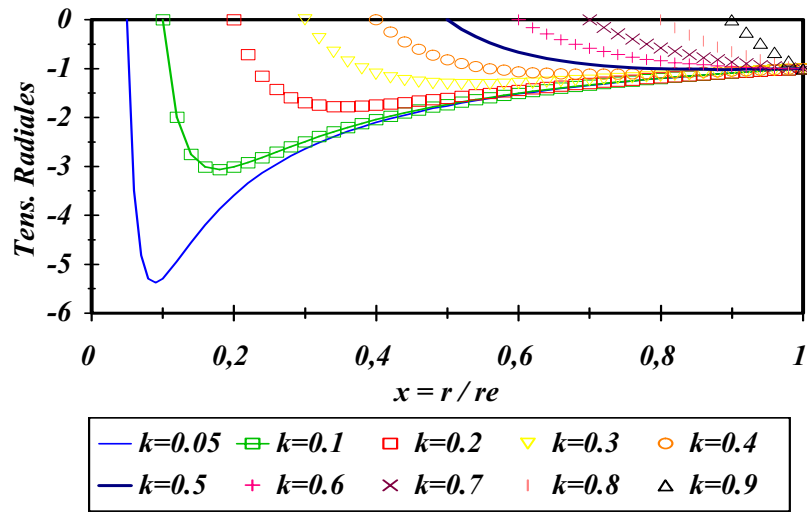
b)

Mucho más significativas son las magnitudes de las tensiones circunferenciales, como se observa en el gráfico 4 b), específicamente para $k = 0.05$. Siendo bastante diferentes, menores, las que se presentan cuando el valor de k es 0,3 y mayor.

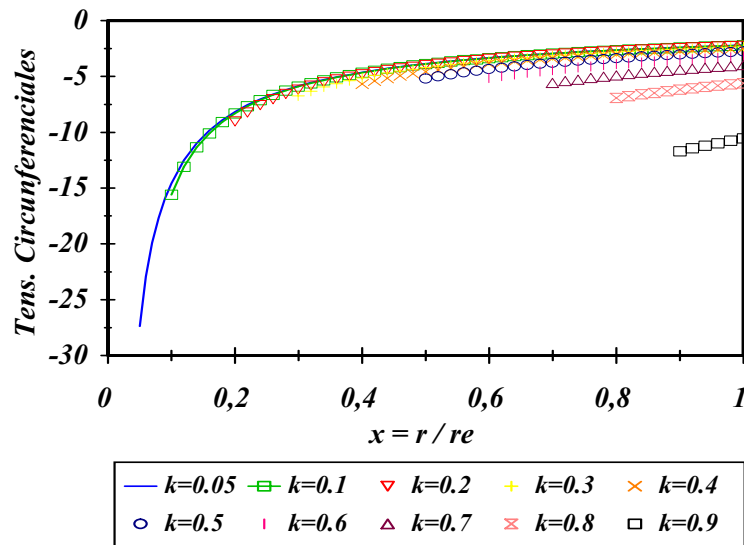
Acción de presión exterior

Cuando sólo hay presión exterior, dichas tensiones tienen un comportamiento similar al caso anterior cuyos resultados se presentan en el gráfico 4 a); y con valores del mismo orden con la variación gradual para igualar a las acciones exteriores sobre ambos bordes, bien notable a partir de $k = 0,5$. Los resultados correspondientes a las tensiones radiales se observan en el gráfico 5 a).

**Gráfico 5. Estado Tensional bajo
compresión sobre borde exterior ; $p=2$**



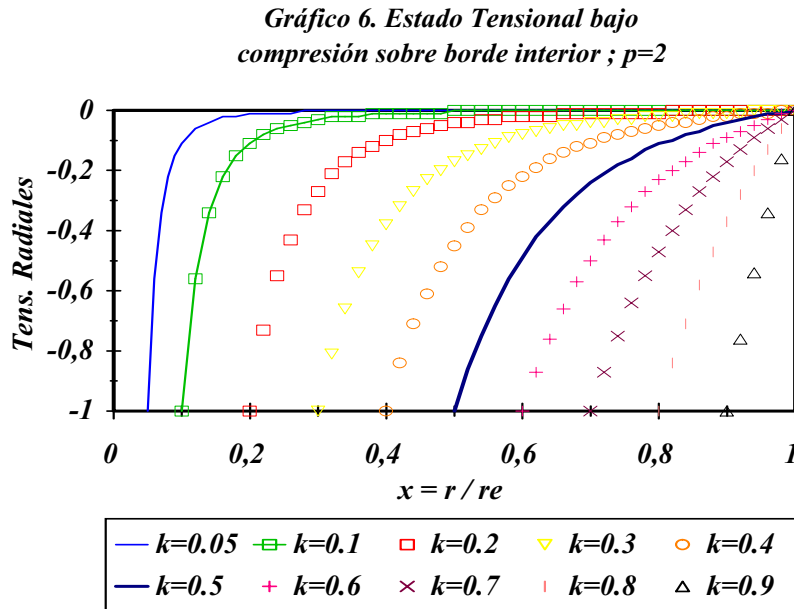
a)



b)

En el gráfico 5 b) se nota que el valor de tensiones circunferenciales para valores de k 0,7 y mayores, son hasta 3 veces más altas en comparación con los resultados para las mismas tensiones, pero bajo cargas de compresión en ambos bordes, (gráfico 4 b)).

Acción de presión interior

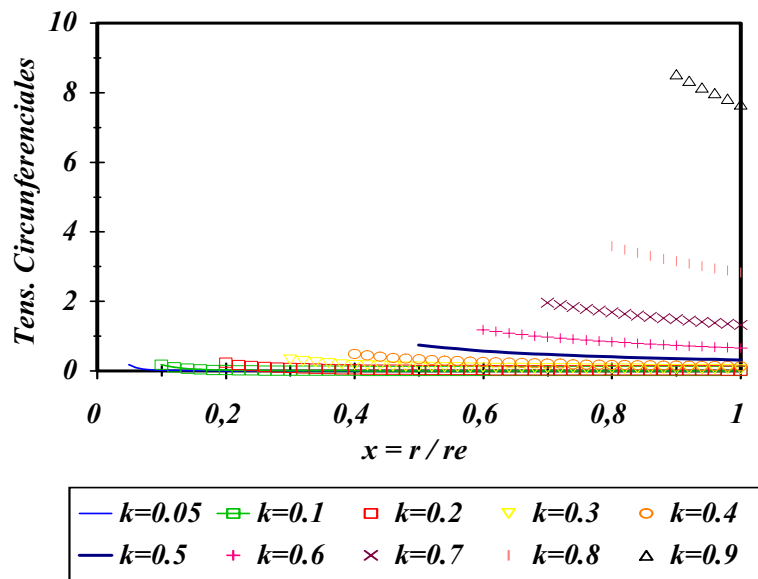


a)

Cuando sólo hay presión interior, no aparecen picos de tensión que superen el valor de la presión actuante; se van atenuando en forma rápida y más gradualmente para valores de k desde 0,05 a 0,2 y desde 0,3 y mayores, respectivamente. Así se observa en el gráfico 6 a).

Ahora las tensiones circunferenciales son de tracción con valores bien significativos cuando $k = 0,9$, comparados con los correspondientes a valores más pequeños de k , como se muestra en el gráfico 6 b).

Gráfico 6. (Continuación)



b)

De la misma manera, que para el caso de variación lineal del espesor, se pueden comparar los gráficos correspondientes a tensiones radiales 4 a), 5 a) y 6 a).

El comportamiento para este tipo de variación es muy similar al que se presentó para aquella variación, en cuanto a distribución de tensiones, pero de valores más elevadas, así los picos de tensión son alrededor de 3 veces mayores.

Con respecto a las tensiones circunferenciales, cabe igual consideración pero en estos casos, las tensiones son 3 veces más elevadas, específicamente cuando los valores de la relación k son del orden de hasta 0,1.

Considerando el mismo tipo de análisis que para la variación lineal del espesor, y tomando a ésta como referencia las diferencias se ven marcadas, sobre el radio interior, dado que la altura del radio interior es bastante menor en la variación parabólica.

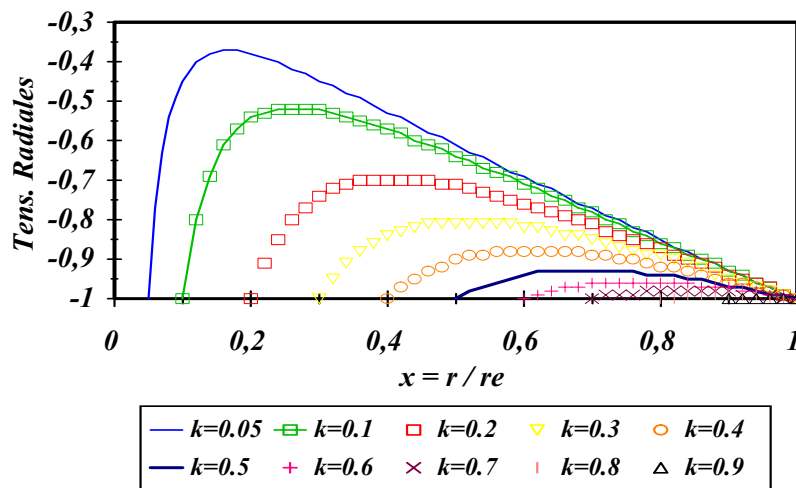
Variación hiperbólica del espesor

En este ítem se muestran los resultados del estado de tensiones para un valor del exponente p igual a -1 ; o sea cuando el espesor de la placa decrece hiperbólicamente desde el radio interior hacia el radio exterior.

Acción de presiones iguales en ambos bordes

Se observa en el gráfico 7 a), que las tensiones radiales disminuyen hacia el radio interior, para relaciones k menores que $0,5$. Este comportamiento es algo distinto para valores grandes de k , donde la distribución tiende a ser constante.

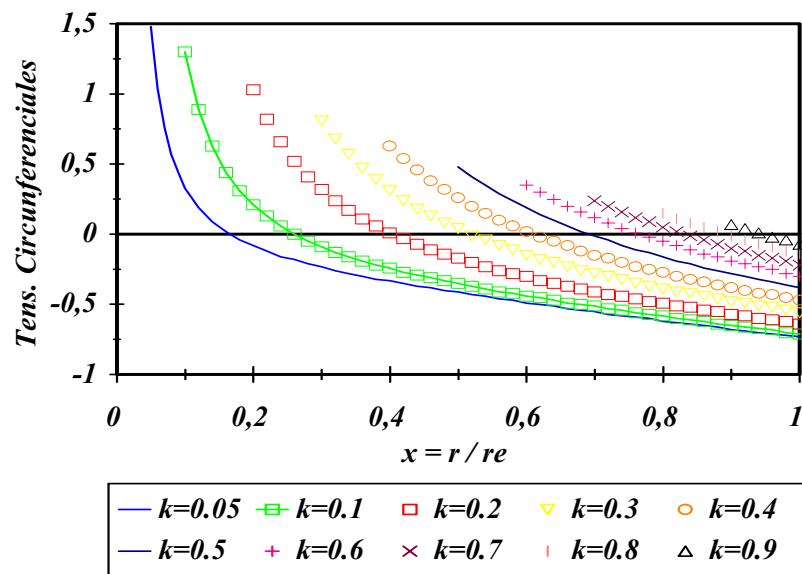
Gráfico 7. Estado Tensional bajo compresión sobre ambos bordes; $p=-1$



a)

Es un comportamiento opuesto al que se vio para el mismo caso con variación parabólica del espesor de la placa.

Gráfico 7. (Continuación)



b)

Con respecto a la distribución de tensiones circunferenciales, según se aprecia en el gráfico 7 b), y a diferencia de todos los casos anteriores se produce un cambio de signo en las tensiones circunferenciales. A partir de la relación $k = 0,6$, los valores mayores de tensión de distinto signo son de aproximadamente la misma magnitud, siendo positivas sobre el radio interior y negativas sobre el radio exterior.

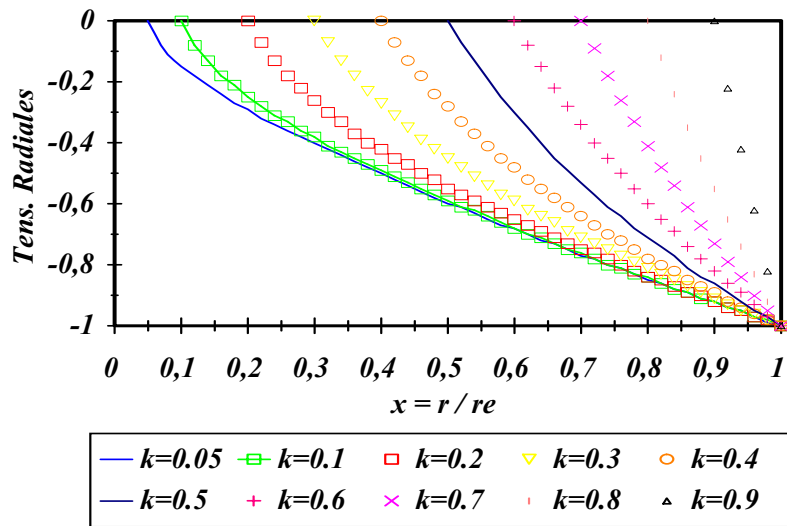
En este caso las magnitudes en general, no superan a los valores de las presiones actuantes; excepto para los casos en que k es 0,05 y 0,1. Son mucho menores comparadas, con el mismo caso analizado para espesor parabólico y lineal.

Acción de presión exterior

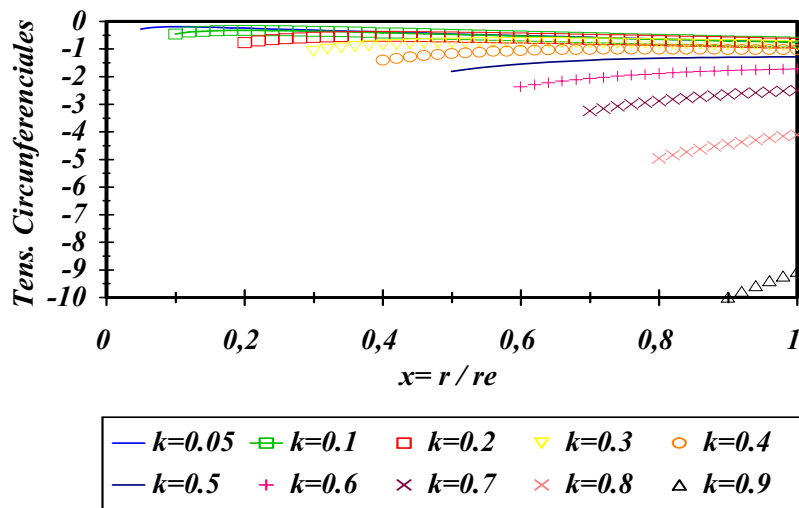
La variación radial de tensiones, gráfico 8 a), presenta una disminución gradual desde un valor igual al de la presión exterior sobre ese radio hasta el valor

nulo de presión que existe sobre el radio interior. Este comportamiento se produce indistintamente para cualquier relación k .

Gráfico 8. Estado Tensional bajo compresión sobre borde exterior; $p=-1$



a)

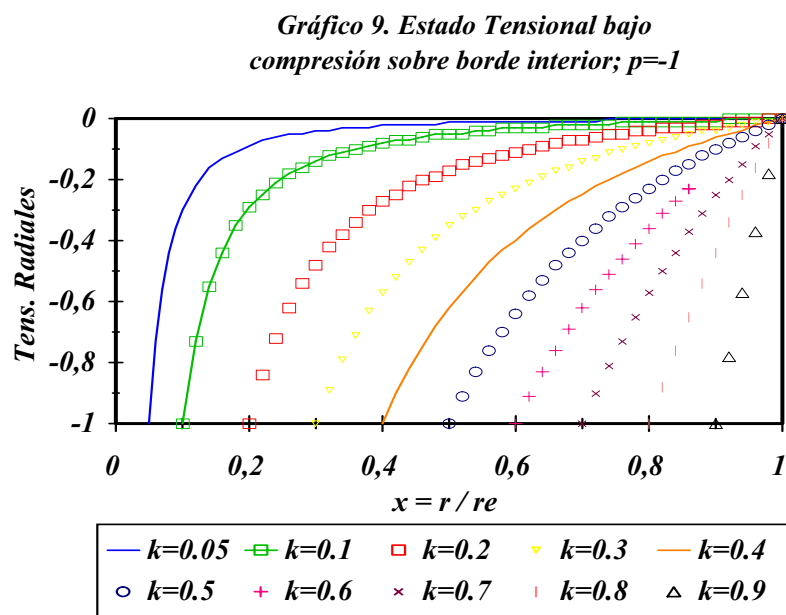


b)

La acción de presión exterior, determina que las tensiones circunferenciales sean de compresión, las que son muy pequeñas para valores que están por debajo de $k = 0,4$ y crecen a medida que aumenta esta relación k . Existe una marcada diferencia entre la mayoría de las relaciones k y la correspondiente a $k = 0,9$.

Acción de presión interior

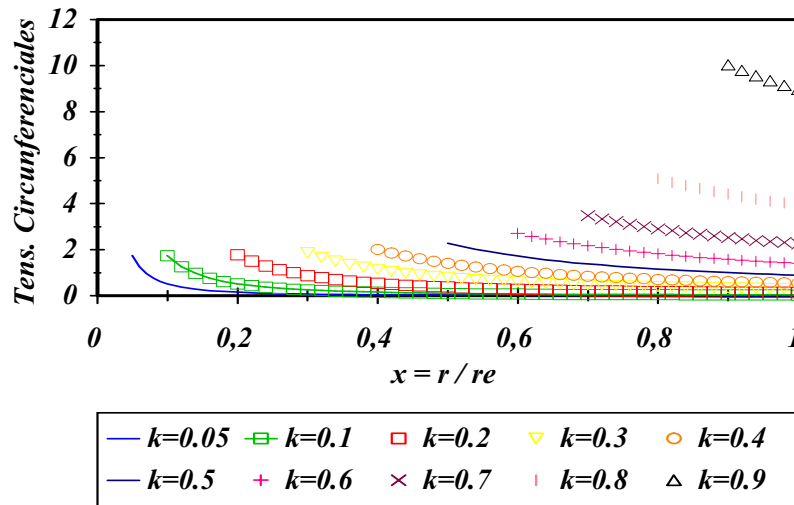
Se ve en el gráfico 9 a), que a partir del valor 0,2 de k , la compresión se reduce en forma lenta con ausencia de zonas que podrían identificarse como de tensiones concentradas altas.



a)

Con referencia al gráfico 9 b), las tracciones que aparecen para las tensiones circunferenciales, en correspondencia con el radio interior sobre el que actúa la presión, tienen un valor casi de 2 veces la presión interior, presentando un crecimiento leve hasta llegar al valor de 10 veces la presión interior cuando $k = 0,9$.

Gráfico 9. (Continuación)



b)

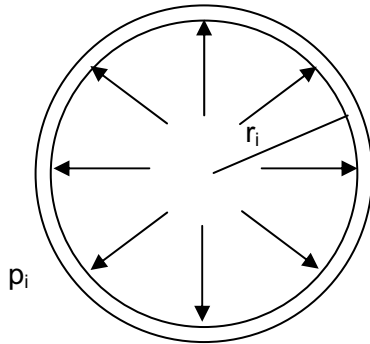
Analizando como en los casos anteriores, por un lado las tensiones radiales y por otro las circunferenciales, se tiene que nuevamente las tensiones radiales para un determinado radio son mayores con compresión sobre ambos bordes, pero con la particularidad de que sin superar a las presiones externas actuantes, las tensiones en las cercanías del radio exterior son mayores que las cercanas al radio interior, dado que la altura menor se encuentra sobre el radio exterior.

Con respecto a las tensiones circunferenciales, el máximo valor corresponde al radio interior con magnitudes del orden de la presión actuante y con valores altos cuando es pequeña la diferencia entre el radio exterior y el radio interior y para presión exterior y presión interior, por supuesto con distintos signos. Presentan la particularidad que bajo compresión en ambos contornos la distribución de tensiones cambia de signo para todos los valores de k.

Se mencionó en todos los casos que se estudiaron, que a partir de un valor de $k = 0,7$, la placa anular, con presión exterior nula y presión interior distinta de cero, las tensiones circunferenciales acusaban una distribución prácticamente constante. Esto

muestra que la placa anular, tiene un claro comportamiento como anillo de paredes delgadas sometido a presión. Por ejemplo:

Para anillos de paredes delgadas se tiene: $\sigma_a = \frac{p \cdot r}{e}$



Donde:

$\sigma_a =$ tensión en el anillo o tensión de aro

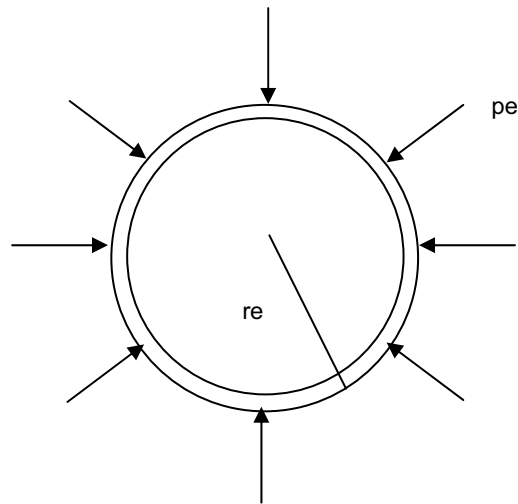
$p =$ presión

$r =$ radio

$e =$ espesor

Comparados con la solución de la placa anular y calculando la tensión en el anillo según⁵ se tiene:

$k = 0,7$	$\sigma_a = 2,33$	$\sigma_{placa\ lineal} = 2,42 = 1,038 \sigma_a$
		$\sigma_{placa\ parab.} = 1,97 = 0,845 \sigma_a$
		$\sigma_{placa\ hiperb.} = 3,49 = 1,498 \sigma_a$
$k = 0,8$	$\sigma_a = 4$	$\sigma_{placa\ lineal} = 4,05 = 1,0125 \sigma_a$
		$\sigma_{placa\ parab.} = 3,59 = 0,8975 \sigma_a$
		$\sigma_{placa\ hiperb.} = 5,1 = 1,275 \sigma_a$
$k = 0,9$	$\sigma_a = 9$	$\sigma_{placa\ lineal} = 9,02 = 1,002 \sigma_a$
		$\sigma_{placa\ parab.} = 8,54 = 0,949 \sigma_a$
		$\sigma_{placa\ hiperb.} = 10,05 = 1,117 \sigma_a$



	$\sigma_a = 3,33$	$\sigma_{placa\ linear} = 4,69 = 1,408 \sigma_a$
$k = 0,7$		$\sigma_{placa\ parabol.} = 5,56 = 1,67 \sigma_a$
		$\sigma_{placa\ hiperbol.} = 3,24 = 0,97 \sigma_a$
	$\sigma_a = 5$	$\sigma_{placa\ linear} = 6,21 = 1,24 \sigma_a$
$k = 0,8$		$\sigma_{placa\ parabol.} = 6,92 = 1,38 \sigma_a$
		$\sigma_{placa\ hiperbol.} = 4,95 = 0,99 \sigma_a$
	$\sigma_a = 10$	$\sigma_{placa\ linear} = 11,1 = 1,11 \sigma_a$
$k = 0,9$		$\sigma_{placa\ parabol.} = 11,69 = 1,169 \sigma_a$
		$\sigma_{placa\ hiperbol.} = 9,98 = 0,998 \sigma_a$

Como se observa, a medida que aumenta el valor de k, el comportamiento se aproxima al de un anillo de pared delgada y aún más para el caso en que $k = 0,9$, en el cual se cumple la relación diámetro medio / espesor es mayor que 15^6 .

Se mencionó que las tensiones circunferenciales crecen más pronunciadamente que las radiales y marcan el efecto de entalla o fisura. Este efecto es comparable con el estado de tensiones en la proximidad del orificio que se genera en una placa rectangular con un orificio circular, sometida a tracción o compresión en

⁵ A. Guzmán, R. Saleme. "Elasticidad y Plasticidad". Tomo I, págs. I-89, I-90, Ed. C. E. I. L. P. (1970).

⁶ A. Guzmán, R. Saleme. "Elasticidad y Plasticidad". Tomo I, pág. I-83, Ed. C. E. I. L. P. (1970).

dos direcciones ortogonales⁷. Esta concentración de tensiones, puede provocar con facilidad roturas, especialmente si el material es frágil o si está sometido a frecuentes variaciones de esfuerzos. Por lo que una solución al problema sería reforzar el borde del orificio, por ejemplo aumentando su espesor.

Del análisis realizado para los casos presentados se puede señalar:

Por un lado, de manera general y de acuerdo a los estados de carga, las tensiones radiales mayores se manifiestan cuando actúa igual presión sobre ambos bordes, interior y exterior; además para diferencias pequeñas entre radio interior y exterior tienden a presentar una distribución constante.

Con respecto a las tensiones circunferenciales el comportamiento más desfavorable por la magnitud de los valores, es cuando actúa presión exterior, ya que cuando actúan presiones iguales en ambos contornos, también son altos, pero se ven atenuados por la acción simultánea entre las tensiones circunferenciales de compresión que ejerce la acción de presión exterior y las tensiones circunferenciales de tracción que determina la acción de la presión interior; para valores pequeños de k . Cuando éstos son grandes es más desfavorable la acción de presión exterior.

Cabe destacar que para la acción tanto de presiones iguales y como de presión exterior, los valores de las tensiones circunferenciales son de distribución aproximadamente constante, cuando las diferencias entre los radios interior y exterior son pequeñas. Cuando estas tensiones son de tracción, o sea cuando sólo actúa presión interior, se presenta este comportamiento también para valores pequeños de k .

En cuanto a la consideración de la variación del espesor, se destaca que para la ley parabólica, el estado tensional es similar en lo referente a distribución o forma, que el que presenta la variación lineal, aunque con valores más altos para las tensiones. Cabe destacar que la forma hiperbólica es la que tiende a disminuir el

⁷ O. Belluzzi. "*Ciencia de la Construcción*". Tomo III, pág. 59. Edit. Aguilar. (1970).

problema del efecto de entalladura, y tampoco se presentan los picos de tensiones radiales que se dan en las variaciones lineal y parabólica.

CAPITULO 4

METODOS DE RESOLUCION

Métodos de Resolución

Como se vió anteriormente, la carga de pandeo elástico de una placa sometida a compresión en su plano medio, puede obtenerse mediante métodos energéticos.

Estos métodos se basan en la determinación de la energía potencial total o funcional de energía del problema en estudio. Así el principio de la mínima energía potencial es generalmente aplicable a todos los problemas de la teoría de elasticidad lineal. Los principios variacionales constituyen una alternativa para obtener soluciones para problemas del continuo. Ellos se basan en especificar una cantidad escalar (funcional), definida por una expresión integral; en la cual aparece la función desplazamiento incógnita. La solución es una función w que hace estacionario al funcional con respecto a variaciones pequeñas δw . Un valor estacionario corresponde a un mínimo o a un máximo del funcional. Un valor mínimo indica que el equilibrio es estable y un valor máximo indica que el equilibrio es inestable. Se supone una configuración deformada que satisfaga las condiciones de borde. Se pueden identificar dos clases de condiciones de borde de un problema, por un lado las esenciales o condiciones geométricas de borde, y por otro lado las naturales o fuerzas o momentos prescritos en los bordes. Las condiciones de borde naturales se encuentran incluidas como un potencial en la expresión del funcional. Por lo que se puede decir, que las condiciones de borde naturales están implícitamente contenidas en la expresión del funcional; mientras que las condiciones de borde esenciales se consideran separadamente.

Una observación importante es que una vez que un funcional se ha establecido, para un problema, la formulación variacional puede emplearse también para generar la ecuación que lo gobierna, y proporcionar una herramienta de análisis general.

Por lo tanto, la aplicación del cálculo de variaciones en conjunto con el principio de estacionaridad de la energía potencial total, permiten establecer las condiciones necesarias para solucionar el problema de pandeo. A los propósitos prácticos, se recurre a métodos aproximados para obtener solución de la ecuación característica de las ecuaciones diferenciales. Dicha solución representa la carga crítica aproximada.

A continuación, se hace una breve descripción de los métodos variacionales aproximados que se utilizan para obtener una solución aproximada de la carga crítica de un sistema elástico.

Método de los residuos ponderados

Considera un operador diferencial D actuando sobre una función desconocida u , de modo que:

$$D(u) = q \quad (1)$$

Supone que la solución tiene la expresión:

$$u_{ap} = \sum a_i \cdot G_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Donde :

a_i = coeficientes ajustables

G_i = funciones independientes de la variable independiente

n = rango igual al número de coeficientes

Sustituyendo la función aproximada en la expresión (1), no conducirá a la igualdad. La diferencia entre ambos miembros es el error E , o residuo. De la aproximación surge que

$$E_{(x)} = D u_{ap} - q \neq 0 \quad (3)$$

Este método requiere que la integral del error ponderado i veces sea nula, esto es:

$$\int_x W_i \cdot E \cdot dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Donde el número de funciones ponderadas, es igual al número de coeficientes ajustables, a_i , en la solución supuesta. Esto conduce a n ecuaciones algebraicas independientes para los n coeficientes desconocidos.

Varios métodos ofrecen distintas alternativas para la función ponderada W utilizada en la integral.

Método de colocación

En este método se utiliza una familia de funciones delta de Dirac para las funciones ponderadas:

$$\int_x \delta(x-x_i) \cdot E \cdot dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Esto equivale a forzar al residuo E a ser cero en los n puntos de la región:

$$E(x_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

la solución de las n ecuaciones conduce a los n coeficientes a_i .

Método de los mínimos cuadrados

Las funciones ponderadas se obtienen derivando la función error con respecto a cada coeficiente de las funciones individuales

$$W_i = \frac{\partial E}{\partial a_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Entonces;

$$\int_x \frac{\partial E}{\partial a_i} \cdot E \cdot dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

que equivale a minimizar la integral del cuadrado del error

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \cdot \int_x E^2 \cdot dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Método de Galerkin

Emplea funciones ponderadas que son las funciones individuales de los coeficientes a_i , de la función aproximada supuesta (2)

$$W_i = \frac{\partial u_{ap}}{\partial a_i} = G_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

o

$$\int_x G_i \cdot E \cdot dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

Método de Rayleigh-Ritz

El método de Rayleigh-Ritz permite obtener, de manera simple, y aproximada la carga crítica.

En este método se supone una función desplazamiento como función de un conjunto finito de parámetros indeterminados, que satisfaga las condiciones de borde geométricas, o también llamadas esenciales. Esa función desplazamiento, es la que se utiliza en la expresión del funcional de energía U . Por este hecho, un sistema con infinitos grados de libertad es reducido a un sistema de grados de libertad finitos; como resultado, el funcional energía se reduce a una función y así, en lugar de utilizar el cálculo de variaciones, podremos utilizar el cálculo ordinario para obtener soluciones.

La utilización de una función desplazamiento, supuesta para aproximar el verdadero desplazamiento de un sistema fue introducido primero por Rayleigh. Por ejemplo, y a modo de ilustración, supongamos que la configuración deformada bajo carga de compresión P de un elemento estructural tiene la forma aproximada:

$$v = A \cdot \phi \quad (12)$$

$v =$ desplazamiento supuesto lateral de una columna.

$\phi =$ función arbitraria que satisface las condiciones de borde de la columna.

$A =$ coeficiente indeterminado.

Sustituyendo la ecuación (12) en la expresión de energía de deformación U_f y energía potencial V del sistema estructural, se obtiene:

$$U_f = U_f(A) \quad (13)$$

$$V = V(P, A) \quad (14)$$

Los valores para la energía de deformación U_f , y la energía potencial V no son los verdaderos, son aproximados como un resultado de la utilización de una curva de deflexión aproximada. Usando el principio de estacionaridad del funcional de energía, la configuración del equilibrio del elemento es identificada si:

$$\delta(U_f + V) = 0 \quad (15)$$

Como Uf y V son funciones de A , se puede escribir la ecuación (15) como:

$$\frac{\partial(Uf + V)}{\partial A} \cdot \delta A = 0 \tag{16}$$

o, porque δA es arbitrario, se tiene:

$$\frac{\partial(Uf + V)}{\partial A} = 0 \tag{17}$$

El valor de P que satisface la ecuación (17) es la carga crítica del elemento.

Para obtener mejores resultados, una serie de funciones arbitrarias ϕ_i , pueden ser utilizadas como formas deflectadas supuestas del elemento. Esto es:

$$v = A_1 \phi_1 + A_2 \phi_2 + \dots + A_n \phi_n = \sum_{i=1}^n A_i \phi_i \tag{18}$$

El uso de esta aproximación fue debida a Ritz, el cual es esencialmente una extensión del método de Rayleigh, que utiliza solamente una función arbitraria.

Sustituyendo la ecuación (18) en las expresiones de energía de deformación y de energía potencial, se tiene:

$$Uf = Uf(A_1, A_2, \dots, A_n) \tag{19}$$

$$V = V(P, A_1, A_2, \dots, A_n) \tag{20}$$

En vistas de la ecuación (16), se tiene:

$$\frac{\partial(Uf + V)}{\partial A_i} \cdot \delta A_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{21}$$

o, por ser δA_i arbitrario,

$$\frac{\partial(Uf + V)}{\partial A_i} = 0 \tag{22}$$

La ecuación (22) representa un sistema de n ecuaciones homogéneas simultáneas, con A y P desconocidas. Para una solución no trivial de los coeficientes A , el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones (las

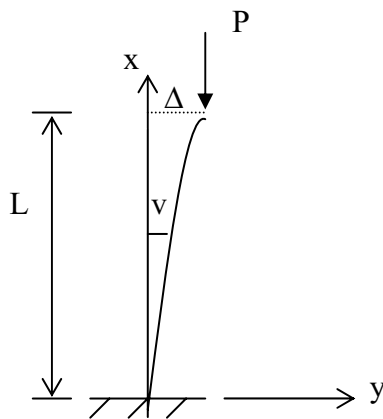
cuales contiene a P como una variable) debe anularse. El menor valor de P , que haga al determinante de la matriz de los coeficientes cero es la carga crítica del elemento.

Aplicación del Método de Rayleigh-Ritz

La función desplazamiento satisface las condiciones de borde geométricas del sistema, y se reemplaza en la expresión del funcional de energía U .

Se toma una columna, empotrada- libre, y se adopta una función aproximada para la configuración deformada, como la que se indica a continuación

$$v = a \cdot x^2$$



Condiciones de borde

$$v_{ap}/x=0 = 0 \Rightarrow v_{ap} = a \cdot 0 = 0$$

$$v'_{ap}/x=0 = 0 \Rightarrow v'_{ap} = 2 \cdot a \cdot x = 0$$

$$v''_{ap} = 2 \cdot a$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot I \cdot \left(\frac{d^2 v_{ap}}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{dv_{ap}}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot I \cdot (2 \cdot a)^2 \cdot dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L (2 \cdot a \cdot x)^2 \cdot dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L 2 \cdot E \cdot I \cdot (2 \cdot a) \cdot 2 \cdot dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L 2 \cdot (2 \cdot a \cdot x) \cdot 2 \cdot x \cdot dx = 4 \cdot E \cdot I \cdot a \cdot L - 4 \cdot P \cdot a \cdot \frac{L^3}{3}$$

$$P_{cr} = 3. \frac{E.I}{L^2}$$

Siendo la solución exacta la que aparece a continuación

$$P_{cr\ exacta} = \pi^2. \frac{E. I}{4. L^2} = 2,467. \frac{E.I}{L^2}$$

Vemos que la P_{cr} aproximada es un 21,6 % mayor que la carga crítica exacta. Esto es debido a que la configuración deformada aproximada representa una estructura que es más rígida que la real.

Admitiendo una función de forma que sea un polinomio de tercer grado; o sea suponemos que la solución aproximada se obtiene agregando un término a la expresión de la deflexión:

$$v_{ap} = a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x^3$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E.I. \left(\frac{d^2 v_{ap}}{dx^2} \right)^2 \cdot dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{dv_{ap}}{dx} \right)^2 \cdot dx$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E.I. (2.a_1 + 6.a_2 \cdot x)^2 \cdot dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L (2.a_1 \cdot x + 3.a_2 \cdot x^2)^2 \cdot dx$$

Como el funcional de energía es ahora función de dos variables a_1 y a_2 , por lo tanto:

$$\frac{\partial U}{\partial a_1} = 0 = \frac{\partial}{\partial a_1} \left[\frac{1}{2} \cdot \int_0^L E.I. (2.a_1 + 6.a_2 \cdot x)^2 \cdot dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L (2.a_1 \cdot x + 3.a_2 \cdot x^2)^2 \cdot dx \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_2} = 0 = \frac{\partial}{\partial a_2} \left[\frac{1}{2} \cdot \int_0^L E.I. (2.a_1 + 6.a_2 \cdot x)^2 \cdot dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L (2.a_1 \cdot x + 3.a_2 \cdot x^2)^2 \cdot dx \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_1} = 0 = 2.E.I. \int_0^L (2.a_1 + 6.a_2 \cdot x) \cdot dx - 2.P. \int_0^L (2.a_1 \cdot x + 3.a_2 \cdot x^2) \cdot x \cdot dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_2} = 0 = 6.E.I. \int_0^L (2.a_1 + 6.a_2 \cdot x) \cdot x \cdot dx - 3.P. \int_0^L (2.a_1 \cdot x + 3.a_2 \cdot x^2) \cdot x^2 \cdot dx$$

Llamando $\lambda = \frac{P.L^2}{E.I}$

$$a_1 \cdot \left[2 - \frac{2}{3} \cdot \lambda \right] + a_2 \cdot L \cdot \left[3 - \frac{3}{4} \cdot \lambda \right] = 0$$

$$a_2 \cdot \left[6 - \frac{3}{2} \cdot \lambda \right] + a_1 \cdot L \cdot \left[12 - \frac{9}{5} \cdot \lambda \right] = 0$$

que escrito matricialmente será:

$$\begin{vmatrix} \left(2 - \frac{2}{3} \cdot \lambda \right) & L \cdot \left(3 - \frac{3}{4} \cdot \lambda \right) \\ \left(6 - \frac{3}{2} \cdot \lambda \right) & L \cdot \left(12 - \frac{9}{5} \cdot \lambda \right) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Para una solución no trivial, el determinante de la matriz de los coeficientes debe anularse

$$\det \begin{vmatrix} \left(2 - \frac{2}{3} \cdot \lambda\right) & L \cdot \left(3 - \frac{3}{4} \cdot \lambda\right) \\ \left(6 - \frac{3}{2} \cdot \lambda\right) & L \cdot \left(12 - \frac{9}{5} \cdot \lambda\right) \end{vmatrix} = 0$$

que en forma expandida es:

$$3 \cdot \lambda^2 - 104 \cdot \lambda + 240 = 0$$

la menor raíz positiva de esta ecuación característica resulta

$$\lambda = 2.49 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{P \cdot L^2}{E \cdot I} \quad \Rightarrow \quad P_{cr} = 2.49 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$$

la cual difiere de la solución exacta sólo en 0,93 % .

También podríamos calcular la P_{cr} a partir de la expresión

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{M^2}{E \cdot I} \cdot dx - \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{P^2}{E \cdot A} \cdot dx \quad \text{considerando el } M_{(x)}$$

$$M_{(x)} = P \cdot (\Delta - v) \quad \text{y con } \Delta = a \cdot L^2 \quad \text{de la primer solución}$$

$$U_f = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{[P \cdot (a \cdot L^2 - a \cdot x^2)]^2}{E \cdot I} \cdot dx$$

$$\frac{\partial U_f}{\partial a} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{2 \cdot P^2}{E \cdot I} \cdot \left[a \cdot (L^2 - x^2)^2 \right] dx = \frac{P \cdot a^2}{E \cdot I} \cdot \left[L^4 \cdot x + \frac{x^5}{5} - 2 \cdot L^2 \cdot \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_0^L$$

$$\frac{\partial U_f}{\partial a} = \frac{8}{15} \cdot \frac{P^2 \cdot L^5}{E \cdot I} \cdot a \quad \text{por lo tanto}$$

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{8}{15} \cdot \frac{P^2 \cdot L^5}{E \cdot I} \cdot a - 4 \cdot P \cdot a \cdot \frac{L^3}{3} = 0 \quad \Rightarrow P_{cr} = 2.5 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$$

Que tiene un error del 1,34 % con respecto a la solución exacta.

Como partimos de la suposición de que la forma deflectada no es la curva real de deflexión, la energía de deformación evaluada basada sobre la ecuación correspondiente a la energía de deformación en función de la curvatura y la correspondiente a la energía de deformación en función del momento flector, es que el error es diferente. Esto se explica así, si una función tiene error, las derivadas de esa función tendrán un error más grande. Sucede que la ecuación de energía de deformación calculada con la curvatura es más sencilla de “manipular”; por ello es usualmente utilizada en los cálculos.

Es de destacar que la carga crítica calculada utilizando el método de Rayleigh-Ritz es “siempre mayor” que la carga crítica exacta. Esto se debe a que suponemos una curva de desplazamiento para el elemento estructural, el cual matemáticamente es restringido para desplazarse de acuerdo a la curva supuesta o aproximada, en lugar de la forma natural y así la rigidez aparente del elemento se incrementa como también la carga de pandeo. Operar con una elástica de forma supuesta, equivale a introducir sistema de vínculos adicionales que impiden a la barra sometida a pandeo tomar cualquier otra forma, excepto la obligada por la curva de deflexión adoptada. Por

otro lado, cuando utilizamos más términos para la expresión matemática de la curva deformada supuesta, estamos introduciendo matemáticamente, más grados de libertad al elemento.

El Método de Rayleigh Ritz optimizado

La tradicional aplicación de la metodología, a partir de la expresión de la energía de deformación de la placa anular, consiste en expresar la solución del funcional gobernante en términos de una sumatoria de funciones coordenadas, cada una de las cuales debe satisfacer al menos, las condiciones de borde esenciales del problema, y multiplicados por una constante arbitraria A_i . El funcional es minimizado con respecto a cada constante A_i y luego de esto resulta un sistema de ecuaciones lineales en A_i .

A partir de estas raíces, que son cotas superiores con respecto a los resultados exactos, por inclusión de un parámetro exponencial indeterminado en las funciones coordenadas; es posible optimizar cada autovalor por la minimización de él con respecto a cada uno de los coeficientes de la combinación. Obviamente, en un problema de campo se minimiza el funcional con respecto al parámetro exponencial.

Rayleigh sugiere este procedimiento en 1894, cuando se utiliza una sola función coordenada. Bert y Schmidt, incluyeron en la función aproximante un parámetro exponencial indeterminado y popularizaron el método para la solución de importantes problemas de mecánica aplicada.

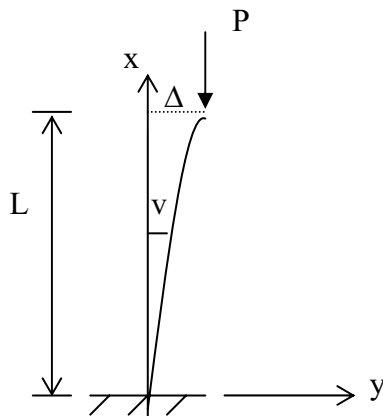
A modo de ejemplo, se verá una aplicación del Método de Rayleigh-Ritz optimizado.

Aplicación del Método de Rayleigh – Ritz optimizado

Sea la columna que aparece en el esquema, se calculará la carga crítica bajo carga de compresión, con un extremo empotrado.

Se adopta como función desplazamiento aproximada:

$$v = b \cdot x^\gamma \quad \text{en la cual } \gamma \text{ es el parámetro indeterminado}$$



Condiciones de borde

$$v_{ap}/x=0 = 0 \Rightarrow v_{ap} = b \cdot 0^\gamma = 0$$

$$v'_{ap}/x=0 = 0 \Rightarrow v'_{ap} = b \cdot \gamma \cdot x^{(\gamma-1)} = 0$$

Además la derivada segunda de la función

aproximada será:

$$v''_{ap} = b \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot x^{(\gamma-2)}$$

En el funcional de energía tendremos:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot I \cdot \left(\frac{d^2 v_{ap}}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{dv_{ap}}{dx} \right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot I \cdot b^2 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma - 1)^2 \cdot x^{2 \cdot (\gamma-2)} dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L b^2 \cdot \gamma^2 \cdot x^{2 \cdot (\gamma-1)} dx$$

$$\frac{dU}{db} = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^L 2 \cdot b \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma - 1)^2 \cdot x^{2 \cdot (\gamma-2)} dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L 2 \cdot b \cdot \gamma^2 \cdot x^{2 \cdot (\gamma-1)} dx = 0$$

$$E \cdot I \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma - 1)^2 \cdot \frac{L^{2 \cdot \gamma-3}}{2 \gamma - 3} - P \cdot \gamma^2 \cdot \frac{L^{2 \cdot \gamma-1}}{2 \cdot \gamma - 1} = 0$$

$$P = \frac{E \cdot I \cdot (\gamma - 1)^2}{L^{2 \gamma-1}} \cdot \frac{L^{2 \cdot \gamma-3}}{(2 \cdot \gamma - 3)} \cdot (2 \cdot \gamma - 1) \Rightarrow P = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \frac{(\gamma - 1)^2 \cdot (2 \cdot \gamma - 1)}{(2 \cdot \gamma - 3)}$$

Con lo que resulta para P un valor de :

$$P = 2,77 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \quad \text{que difiere de la solución exacta en un 12,3 \%}$$

Se ve que aún con un solo término en la expresión de la función desplazamiento el valor obtenido es de una aproximación adecuada.

Supongamos ahora que tomamos dos términos para la función aproximada:

$$v_{ap} = a_1 \cdot x^\gamma + a_2 \cdot x^2$$

$$w'_{ap} = a_1 \cdot \gamma \cdot x^{\gamma-1} + 2 \cdot a_2 \cdot x \quad y \quad w''_{ap} = a_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot x^{\gamma-2} + 2a_2$$

$$\text{La cual cumple con las condiciones de borde: } w_{ap}|_{x=0} = 0 \quad y \quad w'_{ap}|_{x=0} = 0$$

Por lo tanto reemplazando en la expresión del funcional:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot I \cdot \left(\frac{d^2 v_{ap}}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{dv_{ap}}{dx} \right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot I \cdot (a_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot x^{\gamma-2} + 2 \cdot a_2)^2 dx - \int_0^L \frac{P}{2} \cdot (a_1 \cdot \gamma \cdot x^{\gamma-1} + 2 \cdot a_2 \cdot x)^2 dx$$

Minimizando el funcional con respecto a cada uno de los coeficientes de la variable:

$$\frac{\partial U}{\partial a_1} = 0 = \int_0^L E \cdot I \cdot (a_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot x^{\gamma-2} + 2 \cdot a_2) \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot x^{\gamma-2} dx - P \cdot \int_0^L (a_1 \cdot \gamma \cdot x^{\gamma-1} + 2 \cdot a_2 \cdot x) \cdot \gamma \cdot x^{\gamma-1} dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_2} = 0 = \int_0^L E \cdot I \cdot (a_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot x^{\gamma-2} + 2 \cdot a_2) \cdot 2 \cdot dx - P \cdot \int_0^L (a_1 \cdot \gamma \cdot x^{\gamma-1} + 2 \cdot a_2 \cdot x) \cdot 2 \cdot x \cdot dx$$

Operando y llamando $\lambda = \frac{P \cdot L^2}{E \cdot I}$, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left(\gamma^2 \cdot (\gamma - 1)^2 \cdot \frac{L^{2\gamma-3}}{2\gamma-3} - \lambda \cdot \gamma^2 \cdot \frac{L^{2\gamma-3}}{2\gamma-1} \right) \cdot a_1 + \left(2 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot \frac{L^{\gamma-1}}{\gamma-1} - 2 \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot \frac{L^{\gamma-1}}{\gamma+1} \right) = 0$$

$$2 \cdot \left(\gamma \cdot L^{\gamma-1} - \lambda \cdot \gamma \cdot \frac{L^{\gamma-1}}{\gamma+1} \right) \cdot a_1 + 4 \cdot \left(L - \lambda \cdot \frac{L}{3} \right) \cdot a_2 = 0$$

Resolviendo el determinante de la matriz de los coeficientes a_1 y a_2 resulta la siguiente ecuación característica:

$$\left(\frac{1}{3 \cdot (2\gamma-1)} - \frac{1}{(\gamma+1)^2} \right) \cdot \lambda^2 + \left(\frac{2}{\gamma+1} - \frac{1}{2\gamma-1} - \frac{(\gamma-1)^2}{3 \cdot (2\gamma-3)} \right) \cdot \lambda + \frac{(\gamma-1)^2}{2\gamma-3} - 1 = 0$$

Solucionando esta ecuación y minimizando el valor de λ con respecto al parámetro γ resulta:

$$\lambda = 2,4675 \quad \text{por lo cual} \quad P_{cr\ ap} = 2,4675 \frac{E \cdot I}{L^2}$$

Esta solución difiere de la solución exacta en un 0,004 %.

Por lo visto se puede destacar que el método de Rayleigh-Ritz optimizado, da valores que tienen una mejor aproximación a la solución exacta.

CAPITULO 5

FUNCIONAL DE ENERGIA

Funcional de Energía de Deformación Elástica

En este capítulo, se toma como base la expresión del funcional que gobierna el problema en estudio. Luego se reemplaza en la expresión del funcional a la función w , por una sumatoria del producto entre una función polinómica aproximada, y un coeficiente, la cual cumple con las condiciones de borde. En esta tesis se toman dos términos de la sumatoria. Seguidamente se minimiza el funcional con respecto a los dos coeficientes que acompañan a las funciones polinómicas. De ello resulta un sistema de dos ecuaciones, su solución no trivial indica que el determinante de los coeficientes debe ser nulo. Resulta así, una ecuación característica, cuya menor raíz positiva es el valor que nos interesa para determinar la carga crítica.

La energía de deformación para la placa circular, sometida a fuerzas de compresión actuando en su plano medio, tiene dos componentes: una debida al efecto de curvatura de flexión que provoca la carga de compresión y otra debida al efecto del acortamiento radial. Denotando con U a la energía total de deformación se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \iint D \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{2 \cdot (1 - \mu)}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta - \frac{1}{2} \cdot \iint N_r \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

(1)

Siendo: D : rigidez de la placa a flexión
 N_r : fuerza radial de compresión
 w : amplitud del desplazamiento
 r, θ : coordenadas polares
 μ : coeficiente de Poisson

Bajo el estado de carga dado, se tiene simetría radial

$$w = w(r) \quad (2)$$

$$U = \pi \cdot \int D \cdot \left[\left(\frac{d^2 w}{d r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d w}{d r} \right)^2 - 2 \cdot (1 - \mu) \cdot \left(\frac{d^2 w}{d r^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d w}{d r} \right) \right] \cdot r \cdot d r +$$

$$- \pi \cdot \int N \cdot r \cdot \left(\frac{d w}{d r} \right)^2 \cdot r \cdot d r \quad (3)$$

Lamando $x = r/b$, $r = b \cdot x$; será: $dr = b \cdot dx$

Entonces las derivadas totales que aparecen en los términos del funcional serán:

$$\frac{d w}{d r} = \frac{d w}{d x} \cdot \frac{d x}{d r} = \frac{1}{b} \cdot \frac{d w}{d x} \quad (4)$$

$$\frac{d^2 w}{d r^2} = \frac{d}{d r} \cdot \left(\frac{d w}{d r} \right) = \frac{d}{d r} \cdot \left(\frac{d w}{d x} \cdot \frac{d x}{d r} \right) = \frac{d^2 w}{d x^2} \cdot \frac{1}{b^2} \quad (5)$$

$$\frac{d^3 w}{d r^3} = \frac{d}{d r} \cdot \left(\frac{d^2 w}{d r^2} \right) = \frac{d}{d x} \cdot \left(\frac{d^2 w}{d x^2} \cdot \frac{1}{b^2} \right) \cdot \frac{d x}{d r} = \frac{1}{b^3} \cdot \frac{d^3 w}{d x^3} \quad (6)$$

Donde: $b = \text{radio exterior}$

$x = \text{variable adimensional}$

Por lo tanto, la expresión del funcional para la placa anular resulta, en términos de x :

$$U = \pi \left\{ \int_k^1 D \left[\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{1}{b^2} \right)^2 \cdot x \cdot b + \frac{1}{x \cdot b} \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{dw}{dx} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \left(\frac{1}{b^2} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{dw}{dx} \right) \right] \cdot b \cdot dx - \int_k^1 N r \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{dw}{dx} \right)^2 \cdot x \cdot b^2 \cdot dx \right\} \quad (7)$$

$$U = \pi \cdot \left\{ \int_k^1 \frac{D}{b^2} \left[\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \cdot x + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{dw}{dx} \right] \cdot dx - \int_k^1 N r \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\} \quad (8)$$

La función desplazamiento $w(r)$, generalmente se expresa, de acuerdo al método de Rayleigh Ritz optimizado, como producto de funciones polinómicas, en el cual aparece el parámetro γ como un exponente del polinomio. Esa función $w(r)$ representa el desplazamiento aproximado $w_{ap}(r)$ o configuración deformada que adquiere la placa al momento de alcanzar la carga crítica.

Se supone:

$$w_{ap}(r) = \sum_{j=1}^i A_{j-1} \cdot (\alpha_{j-1} \cdot x^\gamma + \beta_{j-1} \cdot x^2 + 1) \cdot x^{j-1} \quad (9)$$

Llamando al producto de las funciones polinómicas como w_{j-1}

$$w_{ap}(r) = \sum_{j=1}^i A_{j-1} \cdot w_{j-1} ; \quad w_{j-1} = (\alpha_{j-1} \cdot x^\gamma + \beta_{j-1} \cdot x^2 + 1) \cdot x^{j-1} \quad (10)$$

$$w_{j-1} = \alpha_{j-1} \cdot x^{\gamma+j-1} + \beta_{j-1} \cdot x^{j+1} + x^{j-1} \quad (11)$$

Las expresiones de las derivadas de la función desplazamiento aproximada serán:

$$\frac{d w_{ap}(r)}{d r} = \sum_{j=1}^i A_{j-1} \cdot \frac{d w_{j-1}}{d r} ; \quad (12)$$

la que aplicando la ecuación (4) resulta

$$\frac{d w_{ap}(r)}{d r} = \sum_{j=1}^i A_{j-1} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{d w_{j-1}}{d x} \quad (13)$$

Para la derivada segunda de la función w_{ap} , se tendrá

$$\frac{d^2 w_{ap}(r)}{d r^2} = \sum_{j=1}^i A_{j-1} \cdot \frac{d^2 w_{j-1}}{d r^2} \quad (14)$$

la que aplicando la expresión (5) resulta:

$$\frac{d^2 w_{ap}(r)}{d r^2} = \sum_{j=1}^i A_{j-1} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{d^2 w_{j-1}}{d x^2} \quad (15)$$

De igual forma, la derivada tercera se expresará

$$\frac{d^3 w_{ap}(r)}{d r^3} = \sum_{j=1}^i A_{j-1} \cdot \frac{d^3 w_{j-1}}{d r^3} \quad (16)$$

la cual aplicando la expresión (6) será:

$$\frac{d^3 w_{ap}(r)}{d r^3} = \sum_{j=1}^i A_{j-1} \cdot \frac{1}{b^3} \cdot \frac{d^3 w_{j-1}}{d x^3} \quad (17)$$

Condiciones de Borde

Las expresiones (10) a (16) son necesarias para expresar las condiciones de borde del problema en estudio. Lógicamente, dichas condiciones varían según sea la restricción que se imponga en el borde exterior. Por ejemplo para reproducir la condición de borde externo empotrado, se tendrá que el desplazamiento y el giro son nulos en la coordenada $x = 1$. O sea, se igualan las expresiones (10) y (12) a cero en el punto $x = 1$.

De una forma similar se expresan igualando la expresión (10) a cero para $x = 1$ y la expresión del momento flector en $x = 1$ a cero, las condiciones cinemática y estática, correspondientes al borde simplemente apoyado

Por otro lado, para el caso más general, planteando condiciones de borde elástico contra rotación y desplazamiento, se tiene:

$$Q = kr \cdot w_{ap} \quad (18)$$

$$Mr = m \cdot \frac{dw_{ap}}{dr} = \frac{m}{b} \cdot \frac{dw_{ap}}{dx} \quad (19)$$

Donde:

kr = constante elástica traslacional

m = constante elástica rotacional

Q = esfuerzo de corte

Mr = momento flector radial

En el borde exterior donde $re = b$ y $x = 1$, se tendrá:

$$Qb = kr \cdot \left(w_{ap} \right)_{x=1} \quad (20)$$

$$Mrb = m \cdot \frac{d w_{ap}}{d r} = \frac{m}{b} \cdot \left(\frac{d w_{ap}}{d x} \right)_{x=1} \quad (21)$$

Las expresiones correspondientes al corte Q y al momento flector Mr son las clásicas que aparecen en la literatura en función del desplazamiento $w(r)$.

$$Q = -D \cdot \left(\frac{d^3 w}{d r^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 w}{d r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d w}{d r} \right) \quad (22)$$

$$Mr = -D \cdot \left(\frac{d^2 w}{d r^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{d w}{d r} \right) \quad (23)$$

Y dadas en función de la variable adimensional x :

$$Q = -D \cdot \left(\frac{1}{b^3} \cdot \frac{d^3 w_{ap}}{d x^3} + \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2 w_{ap}}{d x^2} - \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d w_{ap}}{d x} \right) \quad (24)$$

$$Mr = -D \cdot \left(\frac{1}{b^2} \cdot \frac{d^2 w_{ap}}{d x^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\mu}{x} \cdot \frac{d w_{ap}}{d x} \right) \quad (25)$$

Cuyas expresiones en $x = 1$ son:

$$Q b = -\frac{De}{b^2} \cdot \left(\frac{d^3 w_{ap}}{d x^3} + \frac{d^2 w_{ap}}{d x^2} - \frac{d w_{ap}}{d x} \right)_{x=1} \quad (26)$$

$$Mr b = -\frac{De}{b^2} \cdot \left(\frac{d^2 w_{ap}}{d x^2} + \mu \cdot \frac{d w_{ap}}{d x} \right)_{x=1} \quad (27)$$

Igualando las ecuaciones (20) con (26) y (21) con (27) respectivamente, se obtienen las expresiones generales para las condiciones de borde elásticas contra rotación y desplazamiento. Por lo tanto, las derivadas involucradas en estas expresiones, a partir de la función aproximada

$$w_{j-1} = \alpha_{j-1} \cdot x^{\gamma+j-1} + \beta_{j-1} \cdot x^{j+1} + x^{j-1} \quad \text{serán:}$$

$$\frac{dw_{j-1}}{dx} = (\gamma + j - 1) \cdot \alpha_{j-1} \cdot x^{\gamma+j-2} + \beta_{j-1} \cdot (j+1) \cdot x^j + (j-1) \cdot x^{j-2} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{j-1}}{dx^2} = & (\gamma + j - 1) \cdot (\gamma + j - 2) \cdot \alpha_{j-1} \cdot x^{\gamma+j-3} + \beta_{j-1} \cdot (j+1) \cdot j \cdot x^{j-1} + \\ & + (j-1) \cdot (j-2) \cdot x^{j-3} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w_{j-1}}{dx^3} = & (\gamma + j - 1) \cdot (\gamma + j - 2) \cdot \alpha_{j-1} \cdot x^{\gamma+j-4} + \beta_{j-1} \cdot (j+1) \cdot j \cdot (j-1) \cdot x^{j-2} + \\ & + (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot x^{j-4} \end{aligned} \quad (30)$$

De igualar la ecuación (20) con la ecuación (26) se obtiene:

$$\begin{aligned} & [(\gamma + j - 1) \cdot (\gamma + j - 2) \cdot (\gamma + j - 3)] \cdot \alpha_{j-1} + [(j+1) \cdot (j-1) \cdot j] \cdot \beta_{j-1} + \\ & (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) + [(\gamma + j - 1) \cdot (\gamma + j - 2)] \cdot \alpha_{j-1} + j \cdot (j+1) \cdot \beta_{j-1} + \\ & + (j-1) \cdot (j-2) - (\gamma + j - 1) \cdot \alpha_{j-1} + (j+1) \cdot \beta_{j-1} - (j-1) = -\frac{kr \cdot b^3}{De} \cdot (\alpha_{j-1} + \beta_{j-1} + 1) \end{aligned} \quad (31)$$

Luego de agrupar términos se obtiene

$$\alpha_{j-1} \cdot \left[(\gamma + j - 1)^2 \cdot (\gamma + j - 3) \cdot \frac{De}{kr \cdot b^3} + 1 \right] + \beta_{j-1} \cdot \left[(j + 1)^2 \cdot (j - 1) \cdot \frac{De}{kr \cdot b^3} + 1 \right] + (j - 1)^2 \cdot (j - 3) \cdot \frac{De}{kr \cdot b^3} + 1 = 0 \quad (32)$$

De forma similar , se iguala (21) con (27)

$$\begin{aligned} & [(\gamma + j - 1) \cdot (\gamma + j - 2)] \cdot \alpha_{j-1} + (j + 1) \cdot j \cdot \beta_{j-1} + (j - 1) \cdot (j - 2) + \\ & + \mu \cdot [(\gamma + j - 1) \cdot \alpha_{j-1} + (j + 1) \cdot \beta_{j-1} + (j - 1)] = -\frac{m \cdot b}{De} \cdot [(\gamma + j - 1) \cdot \alpha_{j-1} + (j + 1) \cdot \beta_{j-1} + (j - 1)] \end{aligned} \quad (33)$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} & \alpha_{j-1} \cdot \left[(\gamma + j - 1) \cdot (\mu + \gamma + j - 2) \cdot \frac{De}{m \cdot b} + 1 \right] + \beta_{j-1} \cdot (j + 1) \cdot \left[(j + \mu) \cdot \frac{De}{m \cdot b} + 1 \right] + \\ & + (j - 1) \cdot \left[(j + \mu - 2) \cdot \frac{De}{m \cdot b} + 1 \right] = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Cada término de la función w_{j-1} deberá cumplir con las condiciones de borde dadas por las ecuaciones (32) y (34).

El primer término, se obtiene de reemplazar a j por el valor 1 en la ecuación (10); y la primera condición de borde que debe cumplir se obtiene de reemplazar ese mismo valor de j en la ecuación (32) :

$$\alpha_0 \cdot \left[\frac{De}{kr \cdot b^3} \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma - 2) + 1 \right] + \beta_0 + 1 = 0 \quad (35)$$

La segunda condición de borde que debe cumplir, se obtiene reemplazando a j por el valor 1 en la ecuación (34):

$$\alpha_0 \cdot \gamma \cdot \left[\frac{De}{m \cdot b} \cdot (\mu + \gamma - 1) + 1 \right] + 2 \cdot \beta_0 \cdot \left[\frac{De}{m \cdot b} \cdot (1 + \mu) + 1 \right] = 0 \quad (36)$$

Se observa que en las ecuaciones (35) y (36), aparecen dos incógnitas α_0 y β_0 , las cuales se calculan resolviendo el sistema lineal homogéneo que quedó determinado, así resultan:

$$\alpha_0 = \frac{2 \cdot \left(1 + \mu + \frac{m \cdot b}{De} \right)}{\gamma \cdot \left(\gamma - 1 + \mu + \frac{m \cdot b}{De} \right) - 2 \cdot \left(1 + \mu + \frac{m \cdot b}{De} \right) \cdot \left(\frac{De}{kr \cdot b^3} \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma - 2) + 1 \right)} \quad (37)$$

$$\beta_0 = - \frac{\gamma \cdot \left(\gamma - 1 + \mu + \frac{m \cdot b}{De} \right)}{\gamma \cdot \left(\gamma - 1 + \mu + \frac{m \cdot b}{De} \right) - 2 \cdot \left(1 + \mu + \frac{m \cdot b}{De} \right) \cdot \left(\frac{De}{kr \cdot b^3} \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma - 2) + 1 \right)} \quad (38)$$

El segundo término de la función w_{j-1} , se obtiene reemplazando a j por el valor 2 en la ecuación (10); y la primera condición de borde que debe cumplir, se obtiene de reemplazar en (32) el valor de j por 2:

$$\alpha_1 \cdot \left[(\gamma + 1)^2 \cdot (\gamma - 1) \cdot \frac{De}{kr \cdot b^3} + 1 \right] + \beta_1 \cdot \left[\frac{9De}{kr \cdot b^3} + 1 \right] - \frac{De}{kr \cdot b^3} + 1 = 0 \quad (39)$$

La segunda condición de borde se obtiene en este caso, de reemplazar en (34) a j por 2.

$$\alpha_1 \cdot \left[(\gamma + 1) \cdot (\mu + \gamma) \cdot \frac{De}{m \cdot b} + 1 \right] + 3 \cdot \beta_1 \cdot \left[(\mu + 2) \cdot \frac{De}{m \cdot b} + 1 \right] + \mu \cdot \frac{De}{m \cdot b} + 1 = 0 \quad (40)$$

De estas dos ecuaciones (39) y (40), se obtienen los valores para α_1 y β_1 , como muestran las siguientes expresiones

$$\alpha_1 = \frac{\frac{2 \cdot m \cdot b}{De} \cdot \left(1 - \frac{6 \cdot De}{kr \cdot b^3} \right) + 3 \cdot (2 + \mu) \cdot \left(1 - \frac{De}{kr \cdot b^3} \right) - \mu \cdot \left(1 + \frac{9 \cdot De}{kr \cdot b^3} \right)}{\left[(\gamma + 1) \cdot \left(1 + \frac{9 \cdot De}{kr \cdot b^3} \right) \cdot \left(\gamma + \mu + \frac{m \cdot b}{De} \right) \right] - \left[\left(1 + \frac{De}{kr \cdot b^3} \right) \cdot (\gamma + 1) \cdot (\gamma^2 - 1) \right] \cdot \left(\frac{3 \cdot m \cdot b}{De} + 3 \cdot (2 + \mu) \right)}$$

(41)

$$\beta_1 = \frac{(\gamma + 1) \cdot (\gamma + \mu) \cdot \left(\frac{De}{kr \cdot b^3} - 1 \right) + \frac{m \cdot b}{De} \cdot (\gamma + 1) \cdot \left(\frac{De}{kr \cdot b^3} - 1 \right) + \left(\frac{m \cdot b}{De} + \mu \right) \cdot \left(1 + \frac{De}{kr \cdot b^3} \right) \cdot (\gamma + 1) \cdot (\gamma^2 - 1)}{\left[(\gamma + 1) \cdot \left(1 + \frac{9 \cdot De}{kr \cdot b^3} \right) \cdot \left(\gamma + \mu + \frac{m \cdot b}{De} \right) \right] - \left[\left(1 + \frac{De}{kr \cdot b^3} \right) \cdot (\gamma + 1) \cdot (\gamma^2 - 1) \right] \cdot \left(\frac{3 \cdot m \cdot b}{De} + 3 \cdot (2 + \mu) \right)}$$

(42)

A partir de las expresiones (37), (38), (41) y (42), para $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1$ y β_1 , se puede reproducir, por ejemplo, el vínculo empotrado, o el apoyo simple. Cuando se tiene un empotramiento, se calcula el límite cuando kr y m tienden a infinito en cada una de las expresiones (37), (38), (41) y (42). En caso de ser necesario se opera algebraicamente a los efectos de eliminar posibles indeterminaciones. De modo que los valores de $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1$ y β_1 , serán:

$$\lim_{\substack{kr \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \alpha_0 = \frac{\frac{2.b}{De}}{\frac{\gamma.b}{De} - \frac{2.b}{De}} \Rightarrow \alpha_{0emp} = \frac{2}{\gamma - 2} \quad (43)$$

$$\lim_{\substack{kr \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \beta_0 = \frac{\frac{-\gamma.b}{De}}{\frac{\gamma.b}{De} - \frac{2.b}{De}} \Rightarrow \beta_{0emp} = -\frac{\gamma}{\gamma - 2} \quad (44)$$

$$\lim_{\substack{kr \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \alpha_1 = \frac{\frac{2.b}{De} + 3.(2 + \mu) - \mu}{(\gamma + 1) \cdot \frac{b}{De} - \frac{3.b}{De}} \Rightarrow \alpha_{1emp} = \frac{2}{\gamma - 2} \quad (45)$$

$$\lim_{\substack{kr \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \beta_1 = \frac{\frac{b}{De} - \frac{b}{De} \cdot (\gamma + 1)}{(\gamma + 1) \cdot \frac{b}{De} - \frac{3.b}{De}} \Rightarrow \beta_{1emp} = -\frac{\gamma}{\gamma - 2} \quad (46)$$

Cuando se tiene un apoyo simple, se calcula el límite cuando kr tiende a infinito y m tiende a cero en cada una de las expresiones (37), (38), (41) y (42),

$$\lim_{\substack{kr \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} \alpha_0 = \alpha_{0 \text{ ap simple}} = \frac{2.(1 + \mu)}{\gamma.(\gamma - 1 + \mu) - 2.(1 + \mu)} \quad (47)$$

$$\lim_{\substack{kr \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} \beta_0 = \beta_{0 \text{ ap simple}} = -\frac{\gamma.(\gamma - 1 + \mu)}{\gamma.(\gamma - 1 + \mu) - 2.(1 + \mu)} \quad (48)$$

$$\lim_{\substack{kr \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} \alpha_1 = \frac{3.(2 + \mu) - \mu}{(\gamma + 1).(\gamma + \mu) - 3.(2 + \mu)} \Rightarrow \alpha_{1 \text{ ap simple}} = \frac{2.(3 + \mu)}{\gamma.(\gamma + \mu + 1) - 2.(3 + \mu)} \quad (49)$$

$$\lim_{\substack{kr \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} \beta_1 = \frac{-(\gamma+1)(\gamma+\mu)+\mu}{(\gamma+1)(\gamma+\mu)-3(2+\mu)} \Rightarrow \beta_{1_{ap \ simple}} = -\frac{\gamma(\gamma+\mu+1)}{\gamma(\gamma+\mu+1)-2(3+\mu)} \quad (50)$$

Funcional de energía para la placa anular de espesor variable continuo

El próximo paso es obtener la expresión del funcional de energía para la placa anular de espesor variable.

Así, considerando

$$U = \pi \cdot \left\{ \int_k^l \frac{D}{b^2} \cdot \left[\left(\frac{d^2 w}{d x^2} \right)^2 \cdot x + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w}{d x^2} \cdot \frac{d w}{d x} \right] \cdot dx + \int_k^l N r \cdot \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\}$$

siendo función $w_{ap}(r)$ según las ecuaciones (10) y (11) con dos términos

$$w_{ap}(r) = A_0 \cdot (\alpha_0 \cdot x^\gamma + \beta_0 \cdot x^2 + 1) + A_1 \cdot (\alpha_1 \cdot x^{\gamma+1} + \beta_1 \cdot x^3 + x) \quad (51)$$

sus derivadas serán

$$\frac{d w_{j-1}}{d x} = A_0 \cdot (\gamma \cdot \alpha_0 \cdot x^{\gamma-1} + 2 \cdot \beta_0 \cdot x) + A_1 \cdot (\alpha_1 \cdot (\gamma+1) \cdot x^\gamma + 3 \cdot \beta_1 \cdot x^2 + 1) \quad (52)$$

$$\frac{d^2 w_{j-1}}{d x^2} = A_0 \cdot (\gamma \cdot (\gamma-1) \cdot \alpha_0 \cdot x^{\gamma-2} + 2 \cdot \beta_0) + A_1 \cdot (\alpha_1 \cdot (\gamma+1) \cdot \gamma \cdot x^{\gamma-1} + 6 \cdot \beta_1 \cdot x) \quad (53)$$

En el funcional U aparece Nr , el cual se obtiene a partir de la expresión de σ_r vista en el capítulo correspondiente a distribución tensional y que se transcribe a continuación:

$$\sigma_r = \frac{A \cdot E \cdot (x_1 + \mu)}{1 - \mu^2} \cdot r^{x_1-1} + \frac{B \cdot E \cdot (x_2 + \mu)}{1 - \mu^2} \cdot r^{x_2-1} \quad (54)$$

Donde A y B , son constantes que en el capítulo mencionado correspondían a las ecuaciones (11) y (12). Trabajadas algebraicamente, para expresarlas en función de la relación t entre presiones interior y exterior, se tiene:

$$A = \frac{1 - \mu^2}{E \cdot (x_1 + \mu)} \cdot \frac{pe \cdot k \cdot b^{1-x_1} \cdot (k^{x_2-1} - t)}{k^{x_2} - k^{x_1}} \quad (55)$$

$$B = \frac{1 - \mu^2}{E \cdot (x_2 + \mu)} \cdot \frac{pe \cdot k \cdot b^{1-x_2} \cdot (t - k^{x_1-1})}{k^{x_2} - k^{x_1}} \quad (56)$$

Si llamamos como

$$A' = \frac{A \cdot E \cdot (x_1 + \mu)}{(1 - \mu^2) \cdot pe} \quad B' = \frac{B \cdot E \cdot (x_2 + \mu)}{(1 - \mu^2) \cdot pe} \quad (57)$$

entonces:

$$A' = \frac{k \cdot b^{1-x_1} \cdot (k^{x_2-1} - t)}{k^{x_2} - k^{x_1}} \quad B' = \frac{k \cdot b^{1-x_2} \cdot (t - k^{x_1-1})}{k^{x_2} - k^{x_1}} \quad (58)$$

Por lo cual la tensión normal radial será:

$$\sigma_r = A' \cdot pe \cdot r^{x_1-1} + B' \cdot pe \cdot r^{x_2-1} \quad (59)$$

Estas tensiones, provocadas por las presiones exterior e interior, dan origen a fuerzas radiales por unidad de longitud; multiplicando a la tensión por la altura h del espesor

$$N_r = \sigma_r \cdot h \quad (60)$$

Recordando que la ley de variación del espesor estaba dada por :

$$h = H \cdot r^p, \quad \text{en el borde exterior se tiene una fuerza en la dirección radial } N_e$$

$$N_e = pe \cdot H \cdot b^p \quad \Rightarrow \quad pe = \frac{N_e}{H \cdot b^p} \quad (61)$$

Por lo tanto:

$$N_r = pe \cdot (A' \cdot r^{x_1-1} + B' \cdot r^{x_2-1}) \cdot H \cdot r^p = pe \cdot H \cdot (A' \cdot r^{p+x_1-1} + B' \cdot r^{p+x_2-1}) \quad (62)$$

reemplazando a pe por su igual de la ecuación (61)

$$N_r = \frac{N_e}{b^p} \cdot (A' \cdot r^{p+x_1-1} + B' \cdot r^{p+x_2-1}) \quad (63)$$

$$\text{Llamando} \quad \lambda = \frac{N_e \cdot b^2}{D_e} \quad (64)$$

$$\text{despejando } N_e \quad N_e = \frac{\lambda \cdot D_e}{b^2} \quad (65)$$

se puede escribir a Nr :

$$N r = \frac{\lambda \cdot D_e}{b^2 \cdot b^p} \cdot (A' \cdot r^{p+x_1-1} + B' \cdot r^{p+x_2-1}) \quad (66)$$

y en función de la variable adimensional x :

$$x = \frac{r}{b} \quad r = x \cdot b \quad r^{p+x_1-1} = b^{p+x_1-1} \cdot x^{p+x_1-1} \quad \text{y de igual forma}$$

$$r^{p+x_2-1} = b^{p+x_2-1} \cdot x^{p+x_2-1}$$

$$Nr = \frac{\lambda \cdot De}{b^2 \cdot b^p} \cdot (A' \cdot b^{p+x_1-1} \cdot x^{p+x_1-1} + B' \cdot b^{p+x_2-1} \cdot x^{p+x_2-1}) \quad (67)$$

Llamando

$$C_1 = \frac{A' \cdot b^{p+x_1-1}}{b^p} = \frac{k \cdot b^{l-x_1} \cdot (k^{x_2-1} - t) \cdot b^{p+x_1-1}}{(k^{x_2} - k^{x_1}) \cdot b^p} \Rightarrow C_1 = \frac{k \cdot (k^{x_2-1} - t)}{(k^{x_2} - k^{x_1})} \quad (68)$$

$$C_2 = \frac{B' \cdot b^{p+x_2-1}}{b^p} = \frac{k \cdot b^{l-x_2} \cdot (t - k^{x_1-1}) \cdot b^{p+x_2-1}}{(k^{x_2} - k^{x_1}) \cdot b^p} \Rightarrow C_2 = \frac{k \cdot (t - k^{x_1-1})}{(k^{x_2} - k^{x_1})} \quad (69)$$

será

$$Nr = \frac{\lambda \cdot De}{b^2} \cdot (C_1 \dots x^{p+x_1-1} + C_2 \dots x^{p+x_2-1}) \quad (70)$$

En función de la ley de variación para el espesor será:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \Rightarrow D = \frac{E \cdot H^3 \cdot r^{3 \cdot p}}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad (71)$$

$$D = \frac{E \cdot H^3 \cdot x^{3 \cdot p} \cdot b^{3 \cdot p}}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \text{ llamando } De = \frac{E \cdot h e^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} = \frac{E \cdot H^3 \cdot b^{3 \cdot p}}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad (72)$$

Se puede escribir

$$D = De \cdot x^{3 \cdot p} \quad (73)$$

$$U = \pi \cdot \left\{ \int_k^l \frac{D}{b^2} \cdot \left[\left(\frac{d^2 w}{d x^2} \right)^2 \cdot x + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w}{d x^2} \cdot \frac{d w}{d x} \right] \cdot dx + \right. \\ \left. - \int_k^l N_r \cdot \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\}$$

En esta expresión del funcional reemplazamos a N_r , y a D por (70) y por (73) respectivamente:

$$U = \pi \cdot \left\{ \int_k^l \frac{De}{b^2} \cdot \left[\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \cdot x \cdot x^{3,p} + \frac{1}{x} \cdot x^{3,p} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{dw}{dx} \cdot x^{3,p} \right] \cdot dx + \right. \\ \left. - \frac{\lambda \cdot De}{b^2} \cdot \int_k^l (C_1 \cdot x^{p+x_1-1} + C_2 \cdot x^{p+x_2-1}) \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\} \quad (74)$$

$$U = \pi \cdot \frac{De}{b^2} \left\{ \int_k^l \left[\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \cdot x \cdot x^{3,p} + \frac{1}{x} \cdot x^{3,p} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{dw}{dx} \cdot x^{3,p} \right] \cdot dx + \right. \\ \left. - \lambda \int_k^l (C_1 \cdot x^{p+x_1-1} + C_2 \cdot x^{p+x_2-1}) \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\} \quad (75)$$

Denotando a cada término de la integral que afecta al corchete como:

$$I_{11} = \int_k^l \frac{x^{3,p}}{x} \cdot \left(\frac{dw_{ap}}{dx} \right)^2 dx \quad (76)$$

$$I_{12} = \int_k^l x \cdot \left(\frac{d^2 w_{ap}}{dx^2} \right)^2 dx \quad (77)$$

$$I_{13} = \int_k^l 2 \cdot \mu \cdot \frac{dw_{ap}}{dx} \cdot \frac{d w_{ap}}{dx^2} \cdot x^{3,p} dx \quad (78)$$

Entonces la integral del corchete estará dada por la suma de (76), (77) y (78):

$$I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13} \quad (79)$$

La integral que afecta al coeficiente λ se denota:

$$I_2 = \int_k^l (C_1 \cdot x^{p+x_1-1} + C_2 \cdot x^{p+x_2-1}) \cdot \left(\frac{dw_{ap}}{dx} \right)^2 \cdot x \cdot dx \quad (80)$$

Con lo cual el funcional de energía estará dado por:

$$U = \pi \cdot \frac{De}{b^2} \cdot (I_1 - \lambda \cdot I_2) \quad (81)$$

Minimización del funcional

Derivando (81) con respecto a los coeficientes A_0 y A_1 , e igualando a cero se tiene la condición de minimización del funcional

$$\frac{\partial U}{\partial A_0} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial A_1} = 0 \quad (82)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial U}{\partial A_0} = 0 = \frac{\partial I_1}{\partial A_0} + \frac{\partial I_2}{\partial A_0} \quad \frac{\partial U}{\partial A_1} = 0 = \frac{\partial I_1}{\partial A_1} + \frac{\partial I_2}{\partial A_1} \quad (83)$$

Donde

$$\frac{\partial I_1}{\partial A_0} = \frac{\partial I_{11}}{\partial A_0} + \frac{\partial I_{12}}{\partial A_0} + \frac{\partial I_{13}}{\partial A_0} \quad \frac{\partial I_1}{\partial A_1} = \frac{\partial I_{11}}{\partial A_1} + \frac{\partial I_{12}}{\partial A_1} + \frac{\partial I_{13}}{\partial A_1} \quad (84)$$

Entonces el primer término de la primera ecuación (84) se expresará considerando la ecuación (76):

$$\frac{\partial I_{11}}{\partial A_0} = \int_k^l \frac{x^{3.p}}{x} \cdot 2 \cdot \frac{dw_{ap}}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial A_0} \cdot \frac{dw_{ap}}{dx} \cdot dx \quad (85)$$

El segundo término, de acuerdo a la ecuación (77)

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial A_0} = \int_k^l 2 \cdot x \cdot x^{3.p} \cdot \frac{d^2 w_{ap}}{dx^2} \cdot \frac{\partial}{\partial A_0} \cdot \left(\frac{d^2 w_{ap}}{dx^2} \right) \cdot dx \quad (86)$$

y el tercer término, según la ecuación (78)

$$\frac{\partial I_{13}}{\partial A_0} = \int_k^l 2 \cdot \mu \cdot x^{3.p} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial A_0} \cdot \left(\frac{dw_{ap}}{dx} \right) \cdot \frac{d^2 w_{ap}}{dx^2} + \frac{dw_{ap}}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial A_0} \cdot \left(\frac{d^2 w_{ap}}{dx^2} \right) \right) \cdot dx \quad (87)$$

y el segundo término de la primera de las ecuaciones (83) y teniendo en cuenta la ecuación (80)

$$\frac{\partial I_2}{\partial A_0} = \int_k^l 2 \cdot \frac{dw_{ap}}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial A_0} \cdot \left(\frac{dw_{ap}}{dx} \right) \cdot (C_1 \cdot x^{p+x_1} + C_2 \cdot x^{p+x_2}) \cdot dx \quad (88)$$

Reemplazando en las ecuaciones (85) a (88), las respectivas derivadas y operando resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{11}}{\partial A_0} = & 2 \left[A_0 \cdot \left(\alpha_0^2 \cdot \gamma^2 \cdot \frac{(1 - k^{2(\gamma-1)+3p})}{2(\gamma-1)+3p} + 4 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma+3p})}{\gamma+3p} + 4 \cdot \beta_0^2 \cdot \frac{(1 - k^{3p+2})}{3p+2} \right) + \right. \\ & + A_1 \cdot \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma-1+3p})}{2\gamma-1+3p} + (3 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma+1)) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma+3p+1})}{\gamma+3p+1} + \right. \\ & \left. \left. + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma+3p-1})}{\gamma+3p-1} + 6 \cdot \beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{3p+3})}{3p+3} + 2 \cdot \beta_0 \cdot \frac{(1 - k^{3p+1})}{3p+1} \right) \right] \end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{12}}{\partial A_0} = & 2 \left[A_0 \cdot \left(\alpha_0^2 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma-1)^2 \cdot \frac{(1 - k^{2(\gamma-1)+3p})}{2(\gamma-1)+3p} + 4 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma-1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma+3p})}{\gamma+3p} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 4 \cdot \beta_0^2 \cdot \frac{(1 - k^{3p+2})}{3p+2} \right) + A_1 \cdot \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma^2 - 1) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma-1+3p})}{2\gamma-1+3p} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (6 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma-1) + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot \gamma(\gamma+1)) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma+3p+1})}{\gamma+3p+1} + 12 \cdot \beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{3p+3})}{3p+3} \right) \right] \end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{13}}{\partial A_0} = & 2 \cdot \mu \cdot \left[A_0 \cdot \left(2 \alpha_0^2 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma-1) \cdot \frac{(1 - k^{2(\gamma-1)+3p})}{2(\gamma-1)+3p} + 4 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot \gamma^2 \cdot \frac{(1 - k^{\gamma+3p})}{\gamma+3p} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 8 \cdot \beta_0^2 \cdot \frac{(1 - k^{3p+2})}{3p+2} \right) + A_1 \cdot \left((\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma+1) + \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma^2 - 1)) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma-1+3p})}{2\gamma-1+3p} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (3 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma-1) + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma+1) + 6 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma+3p+1})}{\gamma+3p+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma-1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma-1+3p})}{\gamma-1+3p} + 18 \cdot \beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{3p+3})}{3p+3} + 2 \cdot \beta_0 \cdot \frac{(1 - k^{3p+1})}{3p+1} \right) \right] \end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_2}{\partial A_0} = & 2 \cdot \left\{ A_0 \left[C_1 \left(\alpha_0^2 \cdot \gamma^2 \cdot \frac{(1-k^{2\gamma+p+x_1-1})}{2 \cdot \gamma + p + x_1 - 1} + 4 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1-k^{\gamma+p+x_1+1})}{\gamma + p + x_1 + 1} \right. \right. \right. \\
 & + 4 \cdot \beta_0^2 \cdot \frac{(1-k^{p+x_1+3})}{p+x_1+3} \left. \left. \right) + C_2 \cdot \left(\alpha_0^2 \cdot \gamma^2 \cdot \frac{(1-k^{2\gamma-1+p+x_2})}{2 \cdot \gamma + p + x_2 - 1} + 4 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1-k^{\gamma+p+x_2+1})}{\gamma + p + x_2 + 1} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4 \cdot \beta_0^2 \cdot \frac{(1-k^{p+x_2+3})}{p+x_2+3} \right) \right] + A_1 \cdot \left[\left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot \frac{(1-k^{2\gamma+p+x_1})}{2 \cdot \gamma + p + x_1} \right. \right. \\
 & + (3 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma+1)) \cdot \frac{(1-k^{\gamma+p+x_1+2})}{\gamma + p + x_1 + 2} + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1-k^{\gamma+p+x_1})}{\gamma + p + x_1} + 6 \cdot \beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1-k^{p+x_1+4})}{p+x_1+4} \\
 & \left. \left. + 2 \cdot \beta_0 \cdot \frac{(1-k^{p+x_1+2})}{p+x_1+2} \right) + C_2 \cdot \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot \frac{(1-k^{2\gamma+p+x_2})}{2 \cdot \gamma + p + x_2} \right. \right. \\
 & + (3 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma+1)) \cdot \frac{[1-k^{\gamma+p+x_2+2}]}{\gamma + p + x_2 + 2} + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot \frac{[1-k^{\gamma+p+x_2}]}{\gamma + p + x_2} + 6 \cdot \beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1-k^{p+x_2+4})}{p+x_2+4} \\
 & \left. \left. + 2 \cdot \beta_0 \cdot \frac{(1-k^{p+x_2+2})}{p+x_2+2} \right) \right] \left. \right\} \tag{92}
 \end{aligned}$$

Sumando las expresiones (89), (90) y (91), se tiene $\frac{\partial I_1}{\partial A_0}$, tal como se expresa en (84).

y de la primera de las ecuaciones (83), se obtiene, después de trabajar algebraicamente y agrupar términos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial A_0} = 0 = & A_0 \left\{ \left(\alpha_0^2 \cdot \gamma^2 + \alpha_0^2 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma - l)^2 + \mu \left(2 \alpha_0^2 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma - l) \right) \right) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma - 2 + 3p})}{2\gamma - 2 + 3p} + \right. \\
 & \left(4 \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot \gamma + 4 \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma - l) + \mu \left(4 \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot \gamma^2 \right) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p})}{\gamma + 3p} + \left(8 \cdot \beta_0^2 + 8 \cdot \mu \cdot \beta_0^2 \right) \cdot \frac{(1 - k^{3p + 2})}{3p + 2} + \\
 & - \lambda \left[C_1 \left(\alpha_0^2 \cdot \gamma^2 \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + p + x_1 - l})}{2\gamma + p + x_1 - l} + 4 \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1 + l})}{\gamma + p + x_1 + l} + 4 \cdot \beta_0^2 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 3})}{p + x_1 + 3} \right) + \right. \\
 & \left. + C_2 \left(\alpha_0^2 \cdot \gamma^2 \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma - l + p + x_2})}{2\gamma + p + x_2 - l} + 4 \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2 + l})}{\gamma + p + x_2 + l} + 4 \cdot \beta_0^2 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 3})}{p + x_2 + 3} \right) \right] \left. \right\} + \\
 & + A_l \left\{ \left(\alpha_0 \cdot \alpha_l \cdot \gamma \cdot (\gamma + l) + \alpha_0 \cdot \alpha_l \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma^2 - l) + \mu \left(\alpha_0 \cdot \alpha_l \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma^2 + l) + \alpha_0 \cdot \alpha_l \cdot \gamma \cdot (\gamma^2 - l) \right) \right) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma - l + 3p})}{2\gamma - l + 3p} + \right. \\
 & \left(3 \alpha_0 \cdot \beta_l \cdot \gamma + 2 \alpha_l \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + l) + 6 \alpha_0 \cdot \beta_l \cdot \gamma \cdot (\gamma - l) + 2 \alpha_l \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma + l) + \right. \\
 & \left. + \mu \left(2 \alpha_l \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma + l) + 2 \alpha_l \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + l) + 6 \alpha_0 \cdot \beta_l \cdot \gamma + 3 \alpha_0 \cdot \beta_l \cdot \gamma \cdot (\gamma - l) \right) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p + l})}{\gamma + 3p + l} + \\
 & \left(\alpha_0 \cdot \gamma + \mu \alpha_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma - l) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p - l})}{\gamma + 3p - l} + \left(18 \cdot \beta_0 \cdot \beta_l + 18 \cdot \mu \cdot \beta_0 \cdot \beta_l \right) \cdot \frac{(1 - k^{3p + 3})}{3p + 3} + \left(2 \cdot \beta_0 + 2 \cdot \mu \cdot \beta_0 \right) \cdot \frac{(1 - k^{3p + l})}{3p + l} + \\
 & - \lambda \left[C_1 \left(\alpha_0 \cdot \alpha_l \cdot \gamma \cdot (\gamma + l) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + p + x_1})}{2\gamma + p + x_1} + \left(3 \alpha_0 \cdot \beta_l \cdot \gamma + 2 \alpha_l \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + l) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1 + 2})}{\gamma + p + x_1 + 2} + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1})}{\gamma + p + x_1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 6 \cdot \beta_0 \cdot \beta_l \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 4})}{p + x_1 + 4} + 2 \cdot \beta_0 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 2})}{p + x_1 + 2} \right) + C_2 \left(\alpha_0 \cdot \alpha_l \cdot \gamma \cdot (\gamma + l) \cdot \frac{1 - k^{2\gamma + p + x_2}}{2\gamma + p + x_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(3 \alpha_0 \cdot \beta_l \cdot \gamma + 2 \alpha_l \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + l) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2 + 2})}{\gamma + p + x_2 + 2} + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2})}{\gamma + p + x_2} + 6 \cdot \beta_0 \cdot \beta_l \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 4})}{p + x_2 + 4} + 2 \cdot \beta_0 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 2})}{p + x_2 + 2} \right) \right] \left. \right\}
 \end{aligned}
 \tag{93}$$

De la misma forma se procede para obtener la segunda expresión de las (83). Para ello se trabaja primeramente con las expresiones (76),(77),(78) para obtener la segunda de las ecuaciones (84):

$$\frac{\partial I_{11}}{\partial A_1} = \int_k^1 2 \cdot \frac{x^{3p}}{x} \cdot \frac{dw_{ap}}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{dw_{ap}}{dx} \right) dx \quad (94)$$

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial A_1} = \int_k^1 2 \cdot \frac{d^2 w_{ap}}{dx^2} \cdot \frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{d^2 w_{ap}}{dx^2} \right) \cdot x^{3p+1} dx \quad (95)$$

$$\frac{\partial I_{13}}{\partial A_1} = \int_k^1 2 \cdot \mu \cdot \left[\frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{dw_{ap}}{dx} \right) \cdot \frac{d^2 w_{ap}}{dx^2} + \frac{dw_{ap}}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{d^2 w_{ap}}{dx^2} \right) \right] \cdot x^{3p} \cdot dx \quad (96)$$

Reemplazando en estas tres últimas ecuaciones a las respectivas derivadas y operando se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{11}}{\partial A_1} = & 2 \left[A_0 \cdot \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma - 1 + 3p})}{2\gamma - 1 + 3p} + (3\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma + 2\alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + 1)) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p + 1})}{\gamma + 3p + 1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p - 1})}{\gamma + 3p - 1} + 6\beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{3p + 3})}{3p + 3} + 2\beta_0 \cdot \frac{(1 - k^{3p + 1})}{3p + 1} \right) + \right. \\ & \left. + A_1 \cdot \left(6\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p + 2})}{\gamma + 3p + 2} + \alpha_1^2 \cdot (\gamma + 1)^2 \cdot \frac{(1 - k^{2(\gamma - 1 + 3p)})}{2\gamma + 3p} + 2\alpha_1 \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p})}{\gamma + 3p} + 6\beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{3p + 2})}{3p + 2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 9\beta_1^2 \cdot \frac{(1 - k^{3p + 4})}{4} + \frac{(1 - k^{3p})}{3p} \right) \right] \quad (97) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{12}}{\partial A_1} = & 2 \cdot \left[A_0 \cdot \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma^2 - 1) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma - 1 + 3p})}{2\gamma - 1 + 3p} + (6\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) + 2\alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1)) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p + 1})}{\gamma + 3p + 1} \right. \right. \\ & \left. \left. + 12\beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{3p + 3})}{3p + 3} \right) + A_1 \cdot \left(\alpha_1^2 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma + 1)^2 \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + 3p})}{2\gamma + 3p} + 12\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p + 2})}{\gamma + 3p + 2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 36\beta_1^2 \cdot \frac{(1 - k^{3p + 4})}{3p + 4} \right) \right] \quad (98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{13}}{\partial A_1} = & 2 \cdot \mu \cdot \left[A_0 \cdot \left((\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma + 1) + \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma^2 - 1)) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma - 1 + 3p})}{2 \cdot \gamma - 1 + 3 \cdot p} + \right. \right. \\
& + (3 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + 1) + 6 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p + 1})}{\gamma + 3 \cdot p + 1} + \\
& \left. + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma - 1 + 3p})}{\gamma - 1 + 3 \cdot p} + 18 \cdot \beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{3p + 3})}{3 \cdot p + 3} + 2 \cdot \beta_0 \cdot \frac{(1 - k^{3p + 1})}{3 \cdot p + 1} \right) + \\
& + A_1 \cdot \left((\alpha_1^2 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1)^2 + \alpha_1^2 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1)^2) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + 3p})}{2 \cdot \gamma + 3 \cdot p} + \right. \\
& + (6 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) + 12 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot (\gamma + 1)) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p + 2})}{\gamma + 3 \cdot p + 2} + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3 \cdot p})}{\gamma + 3 \cdot p} + \\
& \left. \left. + 36 \cdot \beta_1^2 \cdot \frac{(1 - k^{3p + 4})}{3 \cdot p + 4} + 12 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{3p + 2})}{3 \cdot p + 2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{99}$$

A partir de la ecuación (80) se obtiene

$$\frac{\partial I_2}{\partial A_1} = \int_k^1 2 \cdot \frac{dw_{ap}}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{dw_{ap}}{dx} \right) \cdot (C_1 \cdot x^{p+x_1-1} + C_2 \cdot x^{p+x_2-1}) \cdot x \cdot dx \tag{100}$$

la que reemplazando las derivadas correspondientes y operando resulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_2}{\partial A_1} = & 2 \left\{ A_0 \left[C_1 \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + p + x_1})}{2\gamma + p + x_1} + (3\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma + 2\alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + 1)) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1 + 2})}{\gamma + p + x_1 + 2} \right. \right. \right. \\
 & + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1})}{\gamma + p + x_1} + 6\beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 4})}{p + x_1 + 4} + 2\beta_0 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 2})}{p + x_1 + 2} \left. \left. \right) + C_2 \cdot \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + p + x_2})}{2\gamma + p + x_2} \right. \right. \\
 & + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2})}{\gamma + p + x_2} + 6\beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 4})}{p + x_2 + 4} + 2\beta_0 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 2})}{p + x_2 + 2} + (3\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma + 2\alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + 1)) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2 + 2})}{\gamma + p + x_2 + 2} \left. \left. \right) \right] + \\
 & + A_1 \left[C_1 \left(\alpha_1^2 \cdot (\gamma + 1)^2 \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + p + x_1 + 1})}{2\gamma + p + x_1 + 1} + 6\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1})}{\gamma + p + x_1 + 3} + 2\alpha_1 \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1 + 1})}{\gamma + p + x_1 + 1} \right. \right. \\
 & + 9\beta_1^2 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 5})}{p + x_1 + 5} + 6\beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 3})}{p + x_1 + 3} + \frac{(1 - k^{p + x_1 + 1})}{p + x_1 + 1} \left. \left. \right) + C_2 \left(\alpha_1^2 \cdot (\gamma + 1)^2 \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + p + x_2 + 1})}{2\gamma + p + x_2 + 1} \right. \right. \\
 & + 6\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2 + 3})}{\gamma + p + x_2 + 3} + 2\alpha_1 \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2 + 1})}{\gamma + p + x_2 + 1} + 9\beta_1^2 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 5})}{p + x_2 + 5} + \\
 & \left. \left. \left. + 6\beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 3})}{p + x_2 + 3} + \frac{(1 - k^{p + x_2 + 1})}{p + x_2 + 1} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{101}$$

Luego se procede a sumar las expresiones (97), (98), (99) y (101) algebraicamente, para obtener la segunda de las expresiones (83):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial A_1} = 0 = A_0 & \left\{ \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) + \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma^2 - 1) + \mu \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma^2 + 1) + \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma^2 - 1) \right) \right) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma - 1 + 3p})}{2\gamma - 1 + 3p} + \right. \\
 & + \left(3\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma + 2\alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + 1) + 6\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) + 2\alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) + \right. \\
 & + \left. \mu \left(2\alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) + 2\alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + 1) + 6\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma + 3\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \right) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p + 1})}{\gamma + 3p + 1} + \\
 & + \left(\alpha_0 \cdot \gamma + \mu \alpha_0 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p - 1})}{\gamma + 3p - 1} + \left(18\beta_0 \cdot \beta_1 + 18\mu \cdot \beta_0 \cdot \beta_1 \right) \cdot \frac{(1 - k^{3p + 3})}{3p + 3} + \left(2\beta_0 + 2\mu \cdot \beta_0 \right) \cdot \frac{(1 - k^{3p + 1})}{3p + 1} + \\
 & - \lambda \left[C_1 \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + p + x_1})}{2\gamma + p + x_1} + \left(3\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma + 2\alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + 1) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1 + 2})}{\gamma + p + x_1 + 2} + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1})}{\gamma + p + x_1} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. 6\beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 4})}{p + x_1 + 4} + 2\beta_0 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 2})}{p + x_1 + 2} \right) + C_2 \cdot \left(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{1 - k^{2\gamma + p + x_2}}{2\gamma + p + x_2} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left(3\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \gamma + 2\alpha_1 \cdot \beta_0 \cdot (\gamma + 1) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2 + 2})}{\gamma + p + x_2 + 2} + \alpha_0 \cdot \gamma \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2})}{\gamma + p + x_2} + 6\beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 4})}{p + x_2 + 4} + 2\beta_0 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 2})}{p + x_2 + 2} \right) \right] + \\
 & + A_1 \cdot \left\{ \left(6\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot (\gamma + 1) + 12\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) + \mu \left(6\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) + 12\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \right) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p + 2})}{\gamma + 3p + 2} + \right. \\
 & + \left(\alpha_1^2 \cdot (\gamma + 1)^2 + \alpha_1^2 \cdot \gamma^2 \cdot (\gamma + 1)^2 + \mu \left(2\alpha_1^2 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1)^2 \right) \right) \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + 3p})}{2\gamma + 3p} + \left(2\alpha_1 \cdot (\gamma + 1) + \mu 2\alpha_1 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \right) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + 3p})}{\gamma + 3p} + \\
 & + \left(45\beta_1^2 + 36\mu \cdot \beta_1^2 \right) \cdot \frac{(1 - k^{3p + 4})}{3p + 4} + \left(6\beta_1 + 12\mu \cdot \beta_1 \right) \cdot \frac{(1 - k^{3p + 2})}{3p + 2} + \frac{(1 - k^{3p})}{3p} - \lambda \left[C_1 \cdot \left(\alpha_1^2 \cdot (\gamma + 1)^2 \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + p + x_1 + 1})}{2\gamma + p + x_1 + 1} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. 6\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1 + 3})}{\gamma + p + x_1 + 3} + 2\alpha_1 \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_1 + 1})}{\gamma + p + x_1 + 1} + 9\beta_1^2 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 5})}{p + x_1 + 5} + 6\beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_1 + 3})}{p + x_1 + 3} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{(1 - k^{p + x_1 + 1})}{p + x_1 + 1} \right) + C_2 \cdot \left(\alpha_1^2 \cdot (\gamma + 1)^2 \cdot \frac{(1 - k^{2\gamma + p + x_2 + 1})}{2\gamma + p + x_2 + 1} + 6\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2 + 3})}{\gamma + p + x_2 + 3} + 2\alpha_1 \cdot (\gamma + 1) \cdot \frac{(1 - k^{\gamma + p + x_2 + 1})}{\gamma + p + x_2 + 1} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. 9\beta_1^2 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 5})}{p + x_2 + 5} + 6\beta_1 \cdot \frac{(1 - k^{p + x_2 + 3})}{p + x_2 + 3} + \frac{(1 - k^{p + x_2 + 1})}{p + x_2 + 1} \right) \right] \Bigg\}
 \end{aligned}$$

Coeficiente λ y determinación de cargas críticas

Las expresiones (93) y (102), forman un sistema de ecuaciones homogéneo. La condición de no trivialidad conduce a una ecuación característica cuadrática en λ . La menor raíz positiva λ de esa ecuación es el parámetro crítico de pandeo, la cual se determina por la minimización de λ con respecto al parámetro γ .

Claramente, uno puede construir funciones coordenadas polinomiales. En la realización de este trabajo, se tomaron otras funciones, pero la que se adoptó, como función aproximada fue la que condujo a resultados más aproximados, toda vez que los casos estudiados se pudieron comparar con los existentes en la literatura.

Una vez obtenido el coeficiente λ , nos conduce directamente a la determinación de la

carga crítica, realizando un sencillo cálculo:
$$N_{cr} = \frac{\lambda \cdot De}{b^2}$$

CAPITULO 6
ANALISIS Y
PRESENTACION DE RESULTADOS

Análisis y Presentación de Resultados

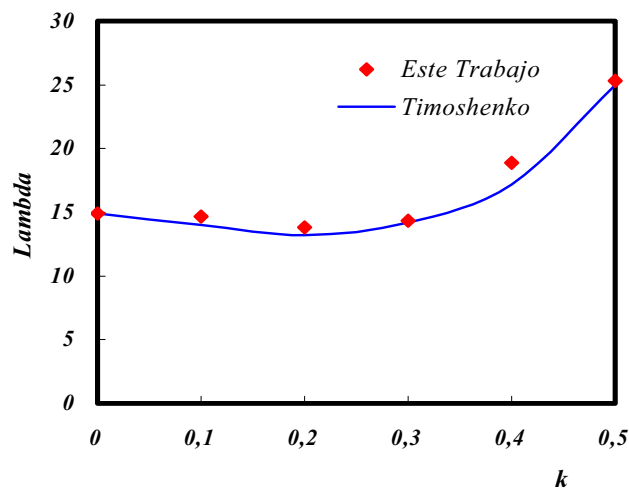
En este capítulo, y con el objeto de calificar el grado de precisión obtenido con la aplicación del método de Rayleigh-Ritz optimizado, se tomaron distintos casos resueltos en la literatura¹.

En la Tabla 1 se volcaron los valores del coeficiente λ obtenidos con el método de Rayleigh-Ritz optimizado, para el caso de placa circular y anular analizada por Timoshenko, con $\mu= 0,3$, su contorno externo sometido a presión y empotrado, de espesor constante. Así para la placa circular Timoshenko obtiene la siguiente expresión para la carga crítica: $(N_r)_{cr} = 14,68 \cdot \frac{D}{b^2}$. Donde el valor 14,68 representa el valor de λ . En el gráfico 1 aparecen con serie de puntos los valores que se obtuvieron.

TABLA 1. Valores del coeficiente λ para placa anular de espesor constante sometida a presión exterior, con borde empotrado

$\mu = 1 / 3$	$k = a / b$					
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
λ	14.911	14.664	13.82	14.33	18.86	25.32

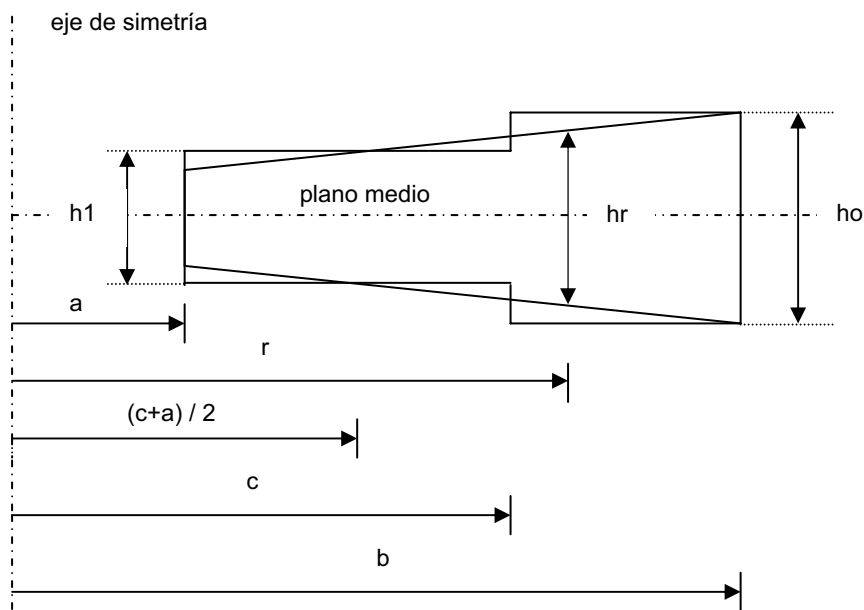
Gráfico 1. Valores del Coef. Lambda . Placa con borde externo empotrado



¹ S. Timoshenko. "Teoría de la Estabilidad Elástica". Ed. Ediar, pág.399. (1961).

Otros casos que se encuentran disponibles, son los que aparecen en la referencia².

En ella se presentan valores del coeficiente λ para placas anulares con perfil variable con discontinuidad. A los fines de que dichos valores resulten orientativos para el caso de placas anulares con perfil variable con continuidad, se respetaron las alturas de cada uno de los tramos, en determinados puntos. En base a estas consideraciones, se calcula la expresión para determinar el valor del exponente p en la variación del espesor adoptada, y a continuación se muestra el esquema considerado



Suponiendo que para $r = \frac{a+c}{2}$ es $h_r = h_1$

y para $r = b \Rightarrow h_r = h_0$ resulta

$$h_1 = H \cdot \left(\frac{a+c}{2}\right)^p \quad h_0 = H \cdot b^p \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1}{h_0} = \left(\frac{a+c}{2 \cdot b}\right)^p$$

aplicando logaritmo: $\log \frac{h_1}{h_0} = p \cdot \log \left(\frac{a+c}{2 \cdot b}\right)$

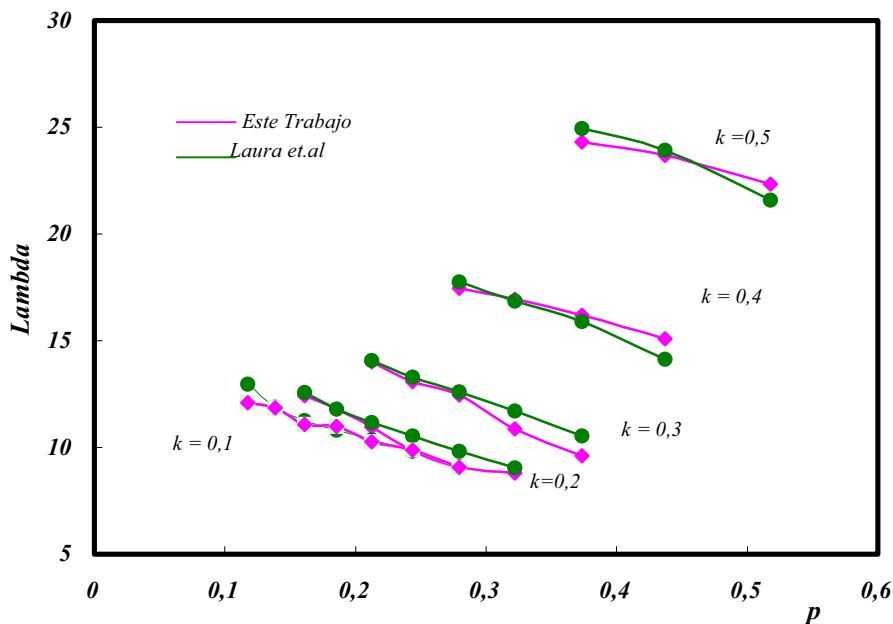
² P. A. A. Laura, L. Ercoli, R. Gutierrez. "Optimized Rayleigh-Ritz Method". Monograph, IMA No.95-34, pág.132.

TABLA 3. Valores del coeficiente λ para placas anulares con borde exterior empotrado

k= a / b	Valores de c / b							
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
0.1	(1)	12,084	11,871	11,088	10,999	10,263	9,889	9,086
	(2)	12,951	11,879	11,275	10,808	10,355	9,810	9,111
0.2	(1)		12,416	11,795	10,963	9,838	9,075	8,808
	(2)		12,572	11,788	11,162	10,536	9,819	9,042
0.3	(1)			14,018	13,093	12,443	10,876	9,600
	(2)			14,084	13,304	12,598	11,712	10,525
0.4	(1)				17,445	16,957	16,183	15,100
	(2)				17,747	16,869	15,897	14,143
0.5	(1)					24,298	23,686	22,349
	(2)					24,934	23,921	21,593

(1) Valores obtenidos con el método de Rayleigh-Ritz optimizado para espesor variable con continuidad
 (2) Valores obtenidos por Dr. Ing. Laura et.al para espesor variable con discontinuidad

Gráfico 2. Valores del Coef. Lambda .Placa anular con borde externo empotrado.



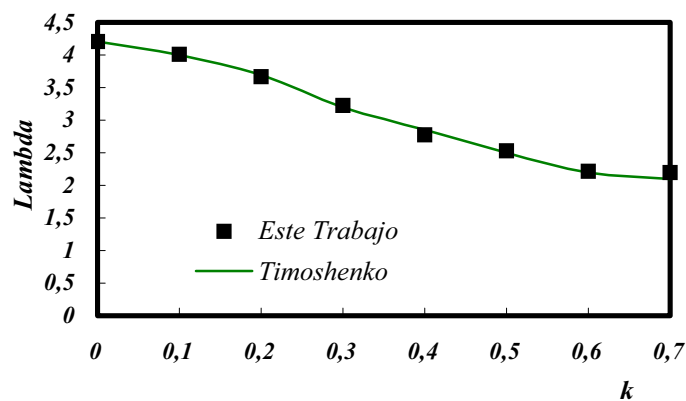
De la misma forma también se obtuvieron valores del coeficiente λ para el mismo caso que analiza Timoshenko, el de placa circular y anular con espesor constante, con su contorno externo simplemente apoyado e igual estado de carga que en el caso anterior. Para la placa circular, obtiene $(N_r)_{cr} = \frac{4,2 \cdot D}{b^2}$, donde 4,2 representa el valor de λ .

En Tabla 4 se muestran los valores de λ para estos casos. En el gráfico 3 con serie de puntos aparecen los valores de la Tabla 4.

TABLA 4. Valores del coeficiente λ para placa anular de espesor constante sometida a presión exterior, con borde externo simplemente apoyado

$\mu=1/3$	$k = a / b$							
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
λ	4.216	4.014	3.671	3.232	2.778	2.537	2.22	2.20

Gráfico 3. Valores del Coef Lambda. Placa de espesor constante con borde externo simplemente apoyado



En la referencia³, se dispone de los valores del coeficiente λ , para placas anulares de espesor variable con discontinuidad y simplemente apoyadas en el contorno externo. De modo que, análogamente al caso de placa empotrada, en la Tabla 5 se muestran los valores de λ para este caso. El gráfico 4 se corresponde con los valores tabulados de λ .

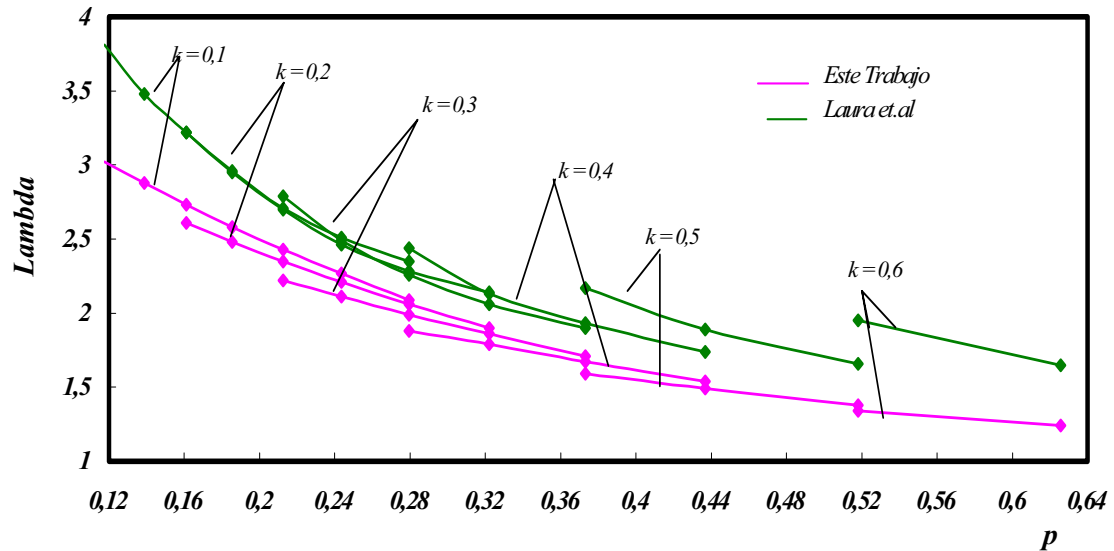
TABLA 5. Valores del coeficiente λ para placas anulares con borde exterior simplemente apoyado

k= a / b	Valores de c / b							
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
0.1	(1)	3,026463	2,880401	2,734349	2,58486	2,429609	2,266787	2,095034
	(2)	3,806	3,485	3,224	2,964	2,706	2,505	2,351
0.2	(1)		2,605524	2,479356	2,347538	2,208295	2,060024	1,901283
	(2)		3,220	2,946	2,696	2,465	2,284	2,136
0.3	(1)			2,220959	2,109447	1,989157	1,85838	1,71533
	(2)			2,786	2,493	2,258	2,064	1,896
0.4	(1)				1,879879	1,778762	1,666018	1,539298
	(2)				2,438	2,131	1,927	1,737
0.5	(1)					1,58946	1,492975	1,380846
	(2)					2,171	1,888	1,656
0.6	(1)						1,34345	1,243316
	(2)						1,951	1,651
0.7	(1)							1,11922
	(2)							1,745

(1) Valores obtenidos con Rayleigh-Ritz optimizado para espesor variable con continuidad
 (2) Valores obtenidos por Dr. Ing. Laura et.al para espesor variable con discontinuidad

³ P. A. A. Laura, L. Ercoli, R. Gutierrez. "Optimized Rayleigh-Ritz Method". Monograph, IMA No.95-34, pág.131.

Gráfico 4. Valores del Coef. Lambda. Placa anular con borde externo simplemente apoyado.



En relación a la vinculación elástica, se considera la variación de la rigidez de los vínculos rotacional y traslacional a fin de poder evaluar en qué rango se los puede considerar elásticos. Para ello se efectuó un análisis en el cual se asignó un determinado valor para k , t , p , μ , μ , μ , μ ; y se fue variando la constante rotacional m . Así se obtuvo para cada variación de m el valor del coeficiente λ . De tal manera resultó que cuando se asignó una rigidez rotacional m grande, los valores de λ fueron cercanos a los de empotramiento rígido, tal como era de esperar. A medida que m se disminuye, λ adopta valores equivalentes al de vínculo apoyado. Pero hay un rango de valores de m , para los cuales λ permanece prácticamente constante y no se identifica con ninguno de los vínculos rígidos mencionados. Para valores de m , de un orden numérico mayor que el orden de la rigidez a flexión, la vinculación se comporta como rígida y para un valor del orden de dicha rigidez, el comportamiento, por el contrario, es netamente como apoyo simple. Con lo cual el rango comprendido entre esos dos señalados, para m , se puede considerar como placa vinculada elásticamente.

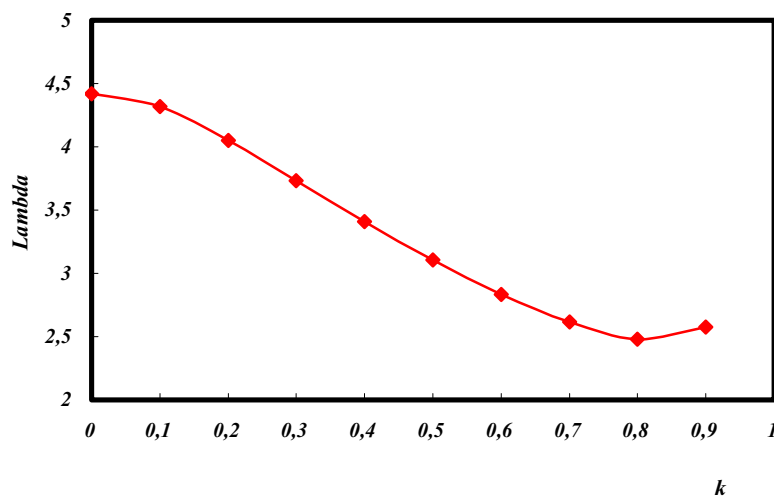
Procediendo de manera análoga , dejando fijo m con un valor grande y variando kr , se obtuvo λ , que reprodujo al vínculo empotrado para kr de un orden por encima de la rigidez a flexión de la placa. Mientras que para valores de kr iguales o menores que la rigidez de la placa no se alcanza a reproducir los valores de λ del vínculo simple, siendo estos λ muy bajos en el orden del centésimo. Esto reproduciría una traslación como cuerpo rígido de la placa.

En la Tabla 6, se reproducen los valores obtenidos para λ , en función de la relación k , cuando las condiciones de borde, no son las clásicas, como empotradas o simplemente apoyadas, sino elásticas contra rotación, bajo presión sobre el borde exterior.

TABLA 6. Valores del coeficiente λ para placas anulares de espesor constante y borde externo restringido elásticamente contra rotación

$\mu = 1/3$	$k = a / b$									
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
λ	4.421	4.320	4.049	3.733	3.411	3.106	2.835	2.617	2.479	2.574

Gráfico 5. Valores del Coef. Lambda. Placa de espesor constante con borde externo elásticamente restringido contra rotación



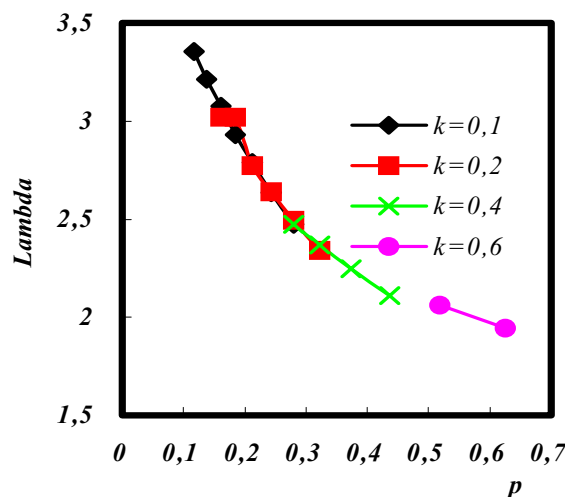
En Tabla 7 se presentan los valores del coeficiente λ en función de p (según Tabla 2); y de k , para apoyo elásticamente restringido contra rotación y presión exterior.

TABLA 7. Valores del coeficiente λ para placas anulares con borde externo restringido elásticamente contra rotación

k=a / b	Valores de c / b						
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0.1	3.354	3.215	3.076	2.931	2.788	2.635	2.474
0.2		3.021	3.021	2.772	2.638	2.495	2.341
0.3			2.730	2.618	2.497	2.366	2.221
0.4				2.475	2.367	2.247	2.112
0.5					2.252	2.143	2.017
0.6						2.062	1.944

En el gráfico 6, se han incluido los valores de λ para algunos valores de k , a los fines de una mejor claridad gráfica.

Gráfico 6. Valores del Coef. Lambda según tabla 7



Influencia de los parámetros k , t , y p sobre el coeficiente λ

En este punto, se presentan tablas con los valores obtenidos del coeficiente λ y gráficos para lograr una visualización más clara, cuando se efectúa una variación en forma independiente de los parámetros k , t , y p . Las tablas 8 a 12, 13 a 17 y 18 a 22 corresponden a la placa empotrada, simplemente apoyada y vinculada elásticamente contra rotación, respectivamente. En los gráficos 7 a 21, a), b), c) y d), se visualiza la variación presentada.

Tabla 8. Influencia del parámetro $t = \pi / p_e$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR EMPOTRADO

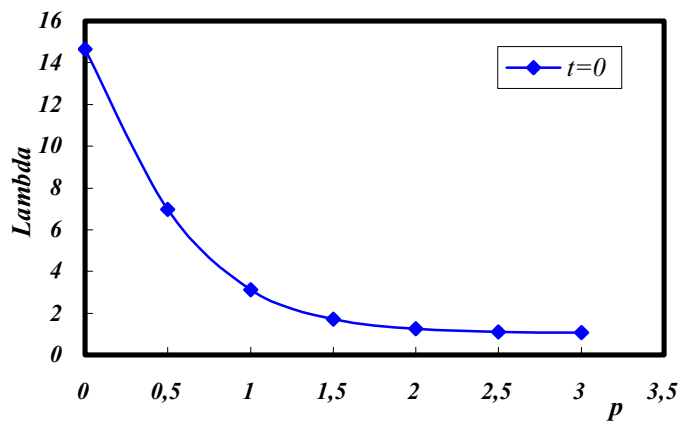
$k = 0.1$

p	$t = \pi / p_e$			
	0	0.5	1.0	2.0
0	14.66	14.45	14.10	13.42
0.5	6.98	6.76	6.54	6.11
1	3.12	3.14	2.87	2.64
1.5	1.72	1.67	1.63	1.56
2	1.26	1.27	1.25	1.22
2.5	1.10	1.09	1.09	1.07
3	1.07	1.03	1.08	1.02

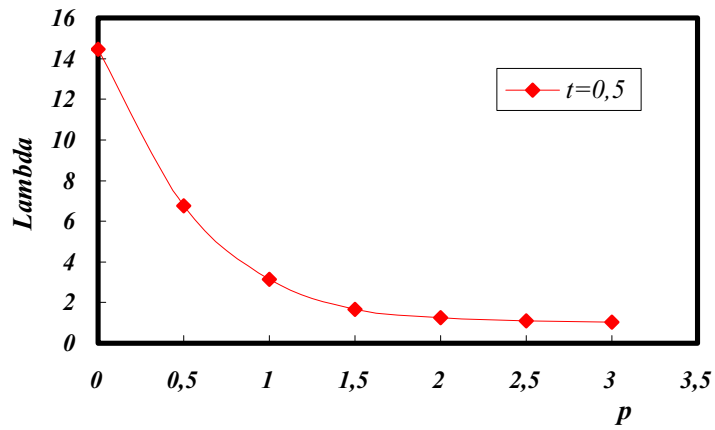
Gráfico 7. Influencia del parámetro $t = \pi / p_e$

$k = 0,1$

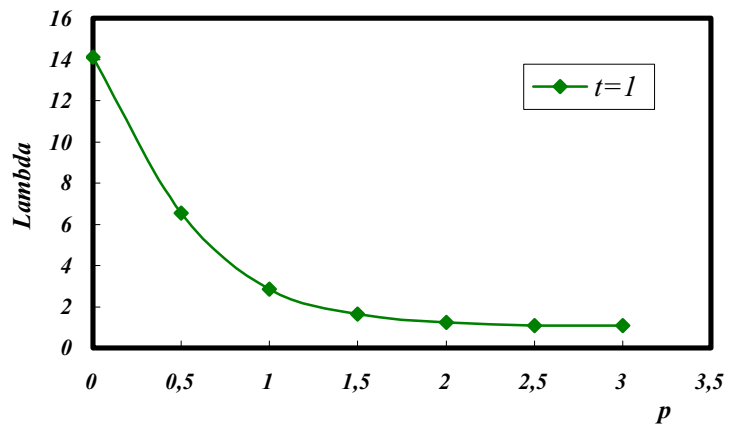
a)



b)



c)



d)

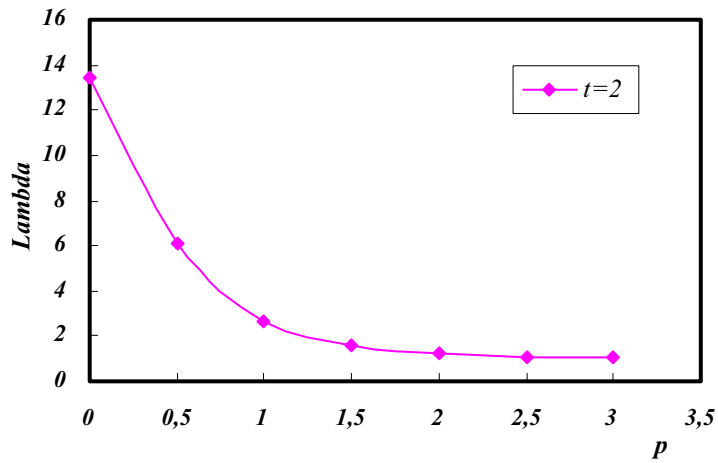


Tabla 9. Influencia del parámetro $t = pi / pe$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR EMPOTRADO

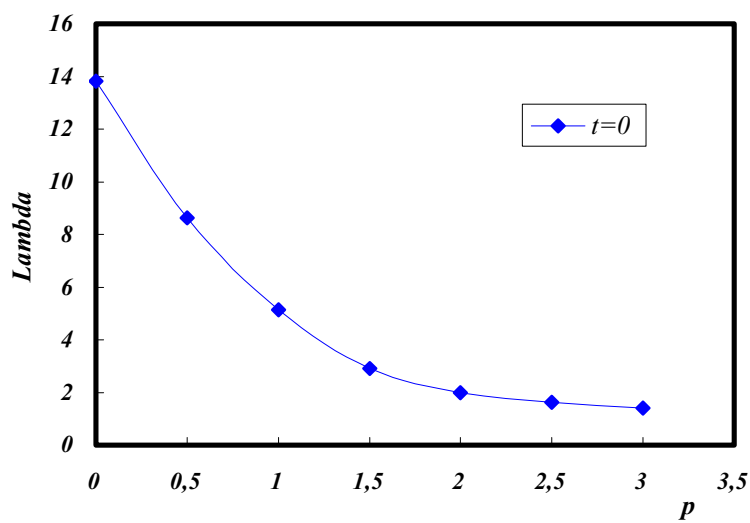
$k=0.2$

p	t = pi / pe			
	0	0.5	1.0	2.0
0	13.820	13.029	12.597	10.632
0.5	8.621	8.013	7.445	6.514
1	5.131	4.614	4.156	3.445
1.5	2.921	2.692	2.496	2.177
2	1.998	1.893	1.799	1.636
2.5	1.614	1.559	1.508	1.414
3	1.401	1.369	1.339	1.283

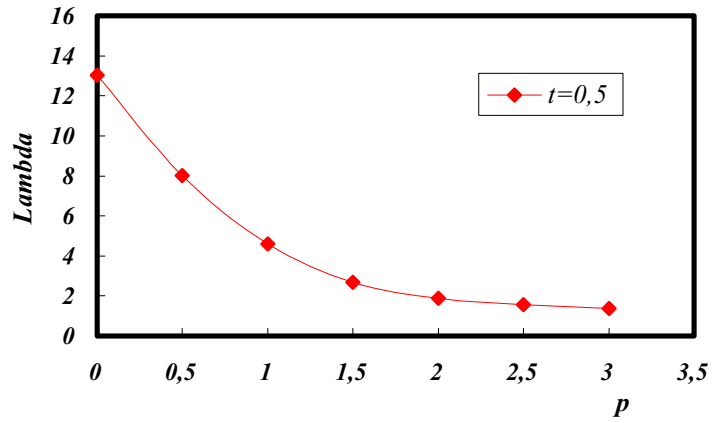
Gráfico 8. Influencia del parámetro $t = pi/pe$

$k=0,2$

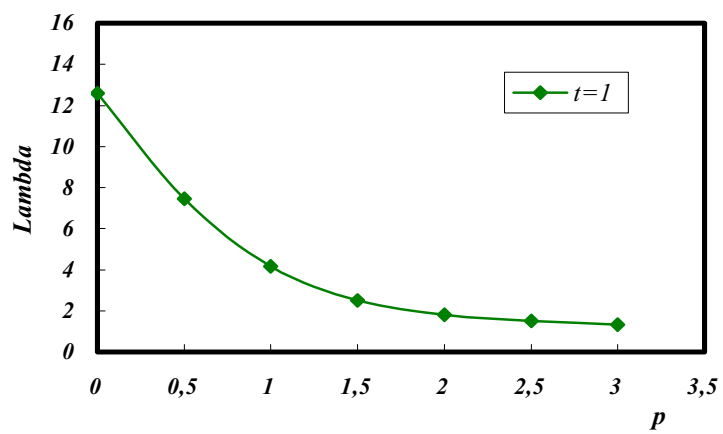
a)



b)



c)



d)

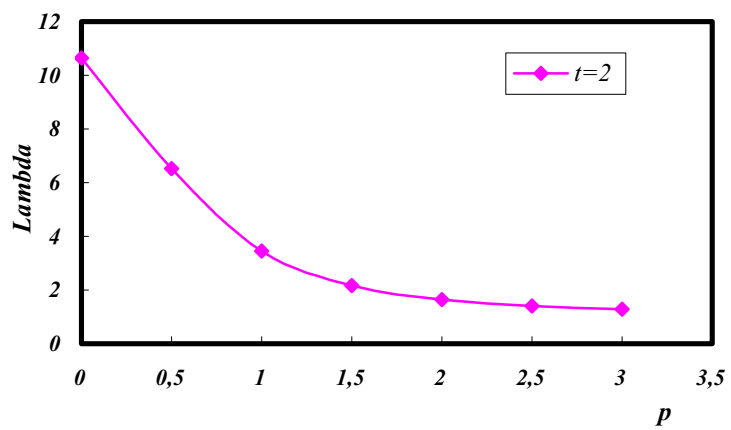


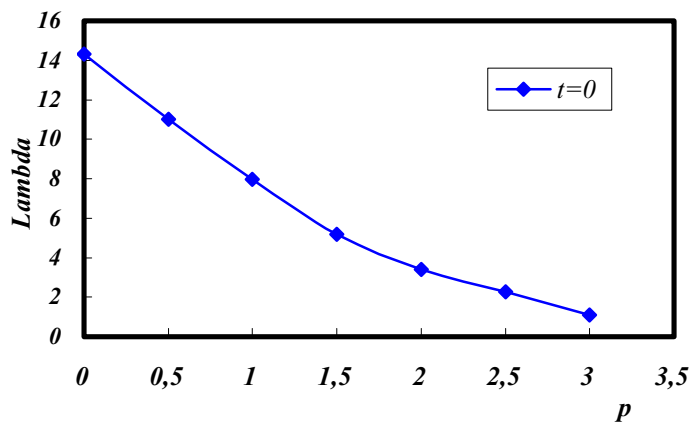
Tabla 10. Influencia del parámetro $t = pi / pe$, sobre el coef. lambda
 PLACA ANULAR CON BORDE EXTERNO EMPOTRADO

$k = 0.3$

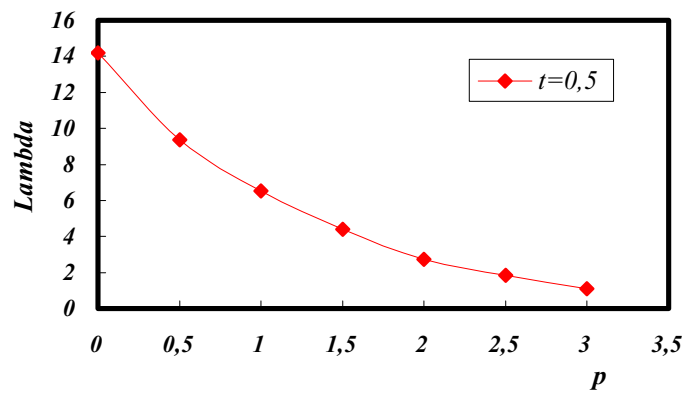
p	t = pi / pe			
	0	0.5	1.0	2.0
0	14.33	14.204	11.746	8.923
0.5	11.001	9.355	8.120	6.397
1	7.972	6.736	5.764	4.399
1.5	5.177	4.382	3.794	2.987
2	3.396	2.718	2.473	2.094
2.5	2.262	2.073	1.913	1.657
3	1.112	1.097	1.083	1.053

**Gráfico 9. Influencia del parámetro $t=pi / pe$
 $k=0,3$**

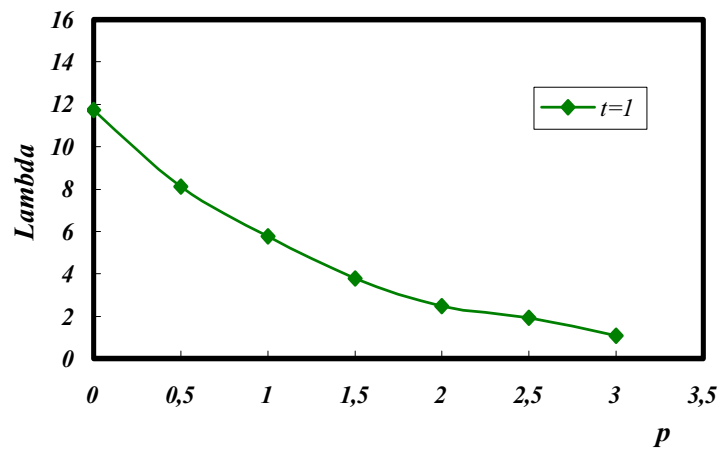
a)



b)



c)



d)

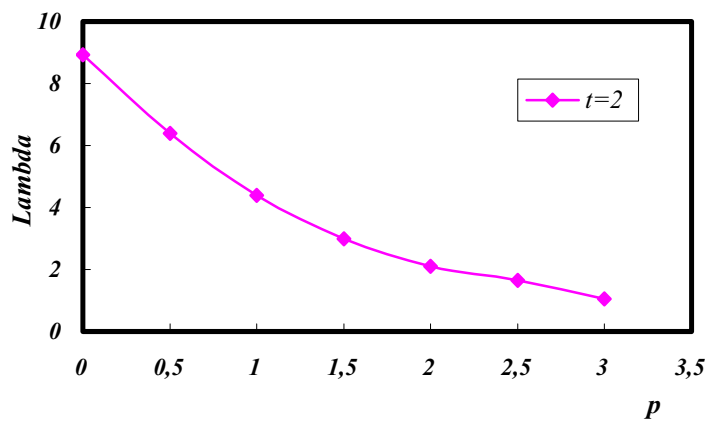
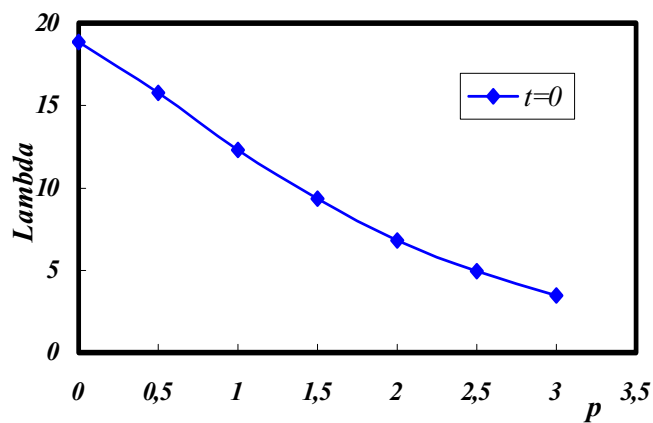


Tabla 11. Influencia del parámetro $t = pi / pe$, sobre el coeficiente lambda
 PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR EMPOTRADO

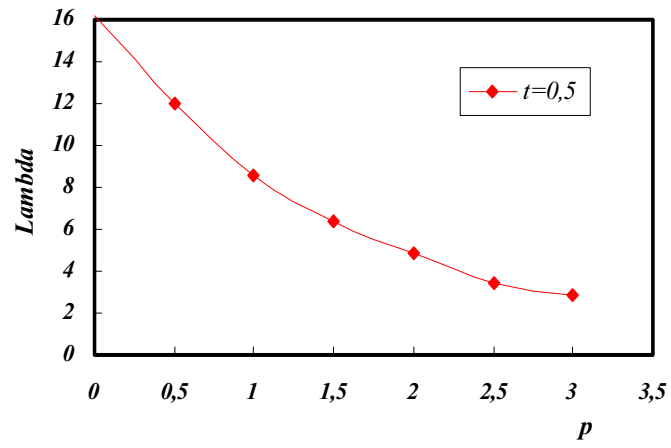
k=0.4

p	t = pi / pe			
	0	0.5	1.0	2.0
0	18.86	16.16	12.64	9.03
0.5	15.78	12.00	9.68	6.98
1	10.56	8.57	7.21	5.48
1.5	9.34	7.34	5.87	4.24
2	6.55	5.23	4.34	3.24
2.5	4.94	3.04	2.70	2.20
3	3.47	3.00	2.65	2.14

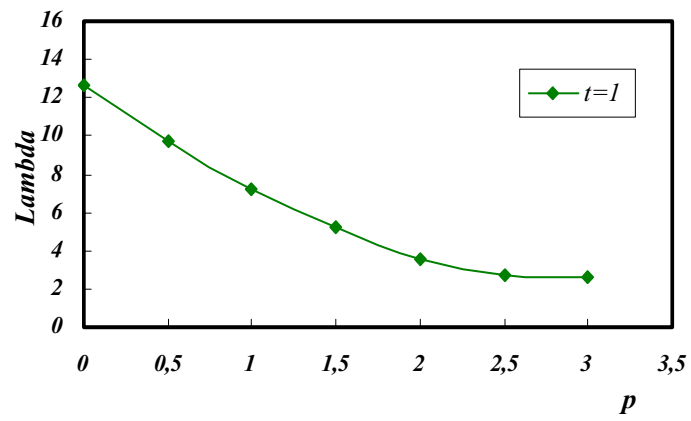
Gráfico 10. Influencia del parámetro $t=pi / pe$
 k=0,4
 a)



b)



c)



d)

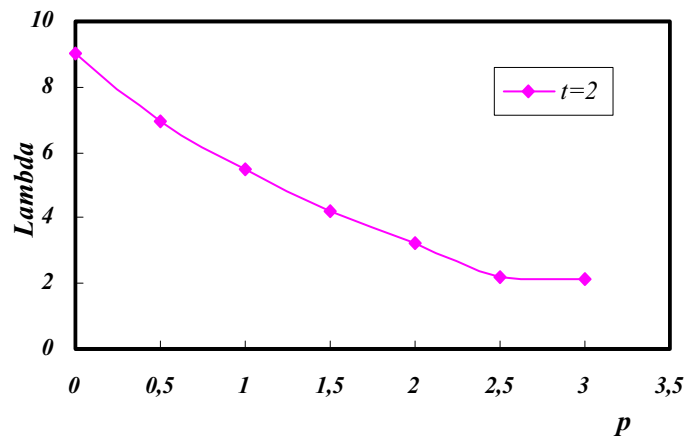


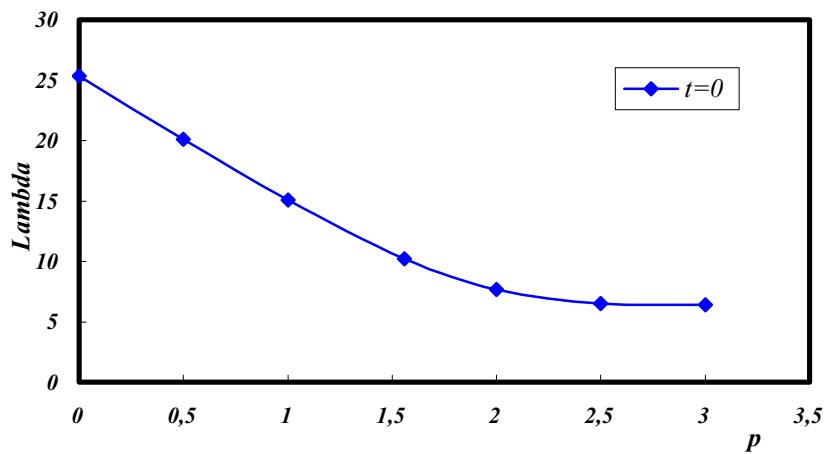
Tabla 12. Influencia del parámetro $t = p_i / p_e$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR EMPOTRADO

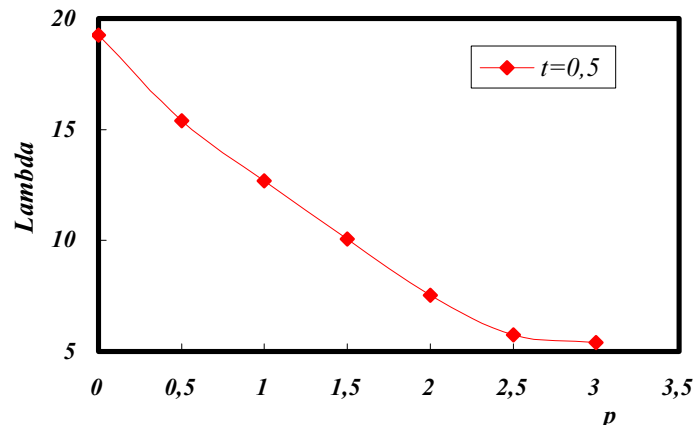
$k=0.5$

p	$t = p_i / p_e$			
	0	0.5	1.0	2.0
0	25.320	19.255	14.93	10.256
0.5	20.096	15.390	12.68	8.894
1	15.070	12.680	10.15	7.329
1.5	10.230	10.060	8.29	6.050
2	7.689	7.544	6.34	4.795
2.5	6.517	5.751	5.17	4.208
3	6.405	5.395	4.29	3.233

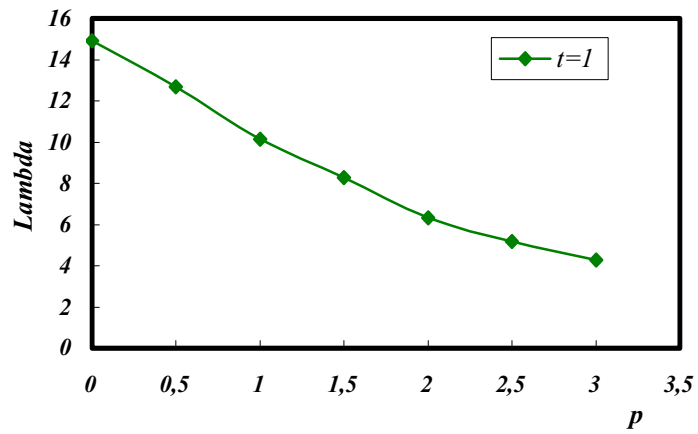
**Gráfico 11. Influencia del parámetro $t=p_i / p_e$
 $k=0,5$
a)**



b)



c)



d)

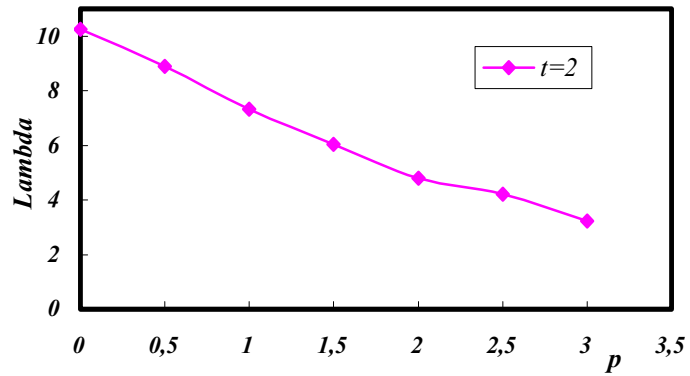


Tabla 13. Influencia del parámetro $t = \pi / p_e$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR SIMPLEMENTE APOYADO

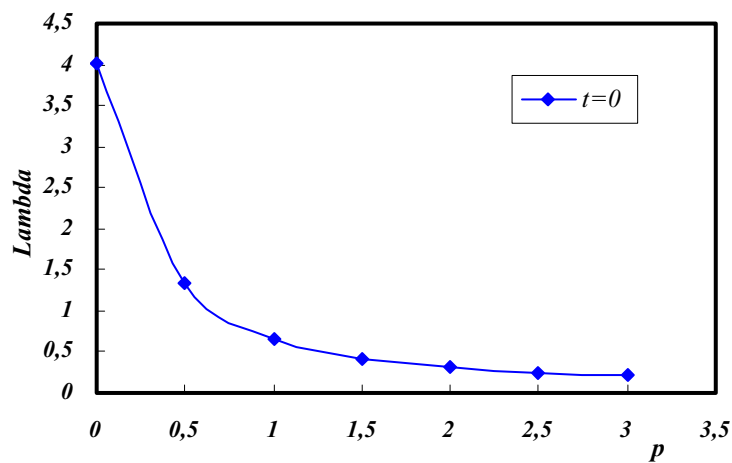
k=0.1

p	t = π / p_e			
	0	0.5	1.0	2.0
0	4.014	3.983	3.947	3.874
0.5	1.348	1.338	1.328	1.309
1	0.658	0.656	0.653	0.648
1.5	0.422	0.421	0.420	0.418
2	0.314	0.313	0.313	0.312
2.5	0.253	0.253	0.253	0.253
3	0.214	0.214	0.214	0.214

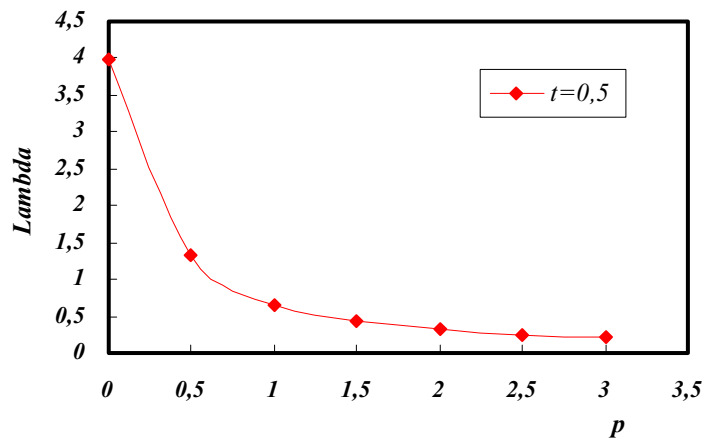
Gráfico 12. Influencia del parámetro $t = \pi / p_e$

k=0,1

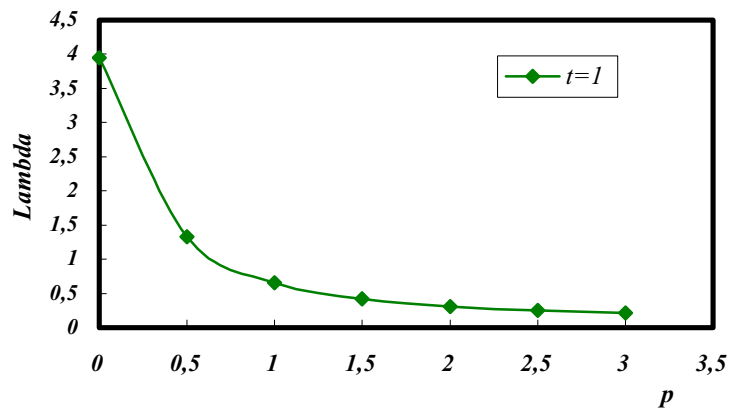
a)



b)



c)



d)

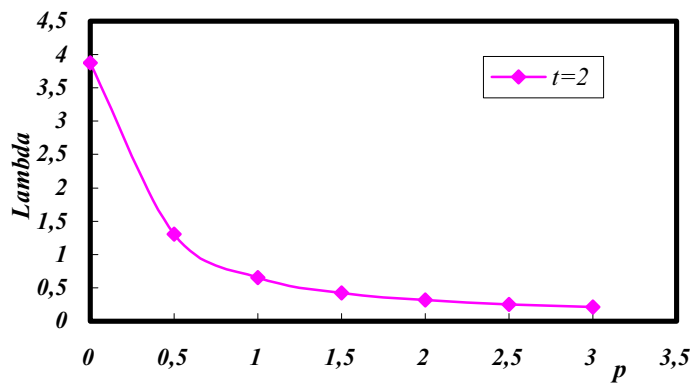


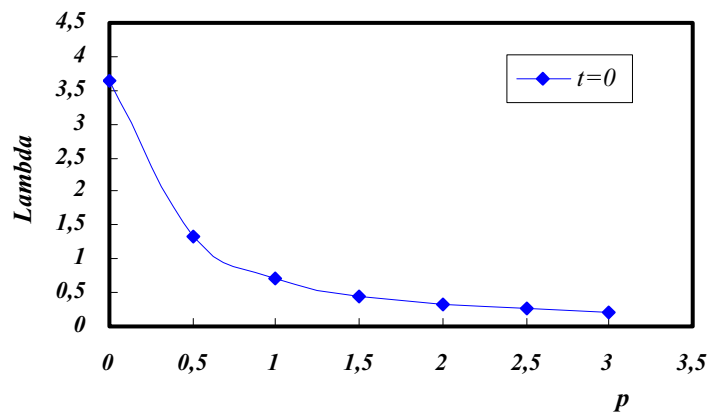
Tabla 14. Influencia del parámetro $t = pi / pe$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR SIMPLEMENTE APOYADO

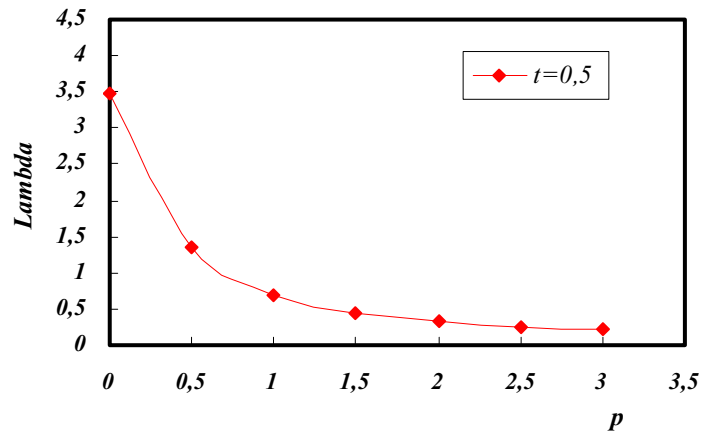
$k=0.2$

p	t = pi / pe			
	0	0.5	1.0	2.0
0	3.654	3.487	3.330	3.043
0.5	1.338	1.347	1.307	1.234
1	0.703	0.690	0.677	0.652
1.5	0.447	0.442	0.437	0.427
2	0.328	0.326	0.324	0.319
2.5	0.261	0.260	0.259	0.257
3	0.219	0.218	0.218	0.217

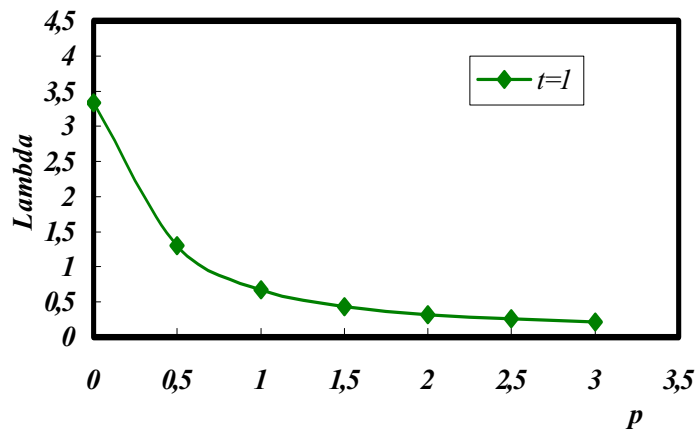
**Gráfico 13. Influencia del parámetro $t = pi / pe$
 $k=0,2$
a)**



b)



c)



d)

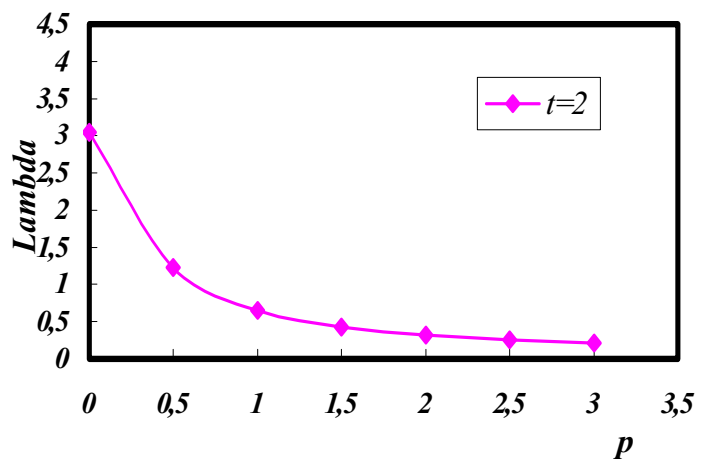


Tabla 15. Influencia del parámetro $t = pi / pe$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR SIMPLEMENTE APOYADO

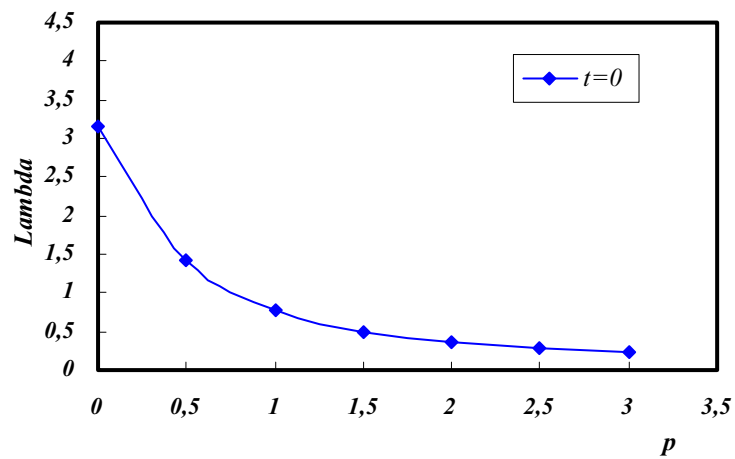
k=0.3

p	t = pi / pe			
	0	0.5	1.0	2.0
0	3.158	2.863	2.612	2.211
0.5	1.418	1.326	1.244	1.105
1	0.765	0.730	0.697	0.639
1.5	0.491	0.475	0.460	0.433
2	0.356	0.348	0.341	0.326
2.5	0.279	0.275	0.271	0.263
3	0.230	0.228	0.226	0.221

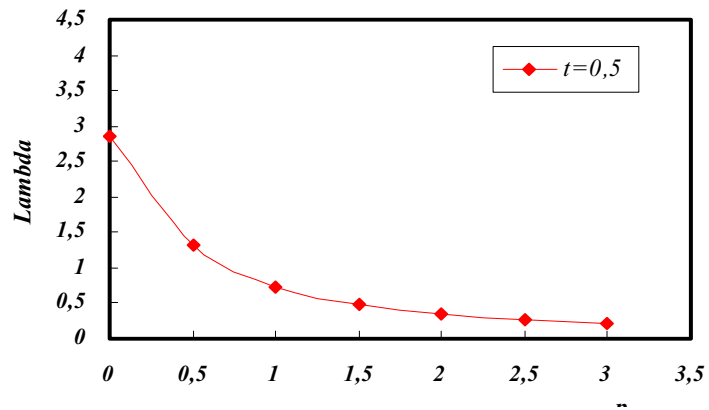
Gráfico 14. Influencia del parámetro $t=pi / pe$

k=0,3

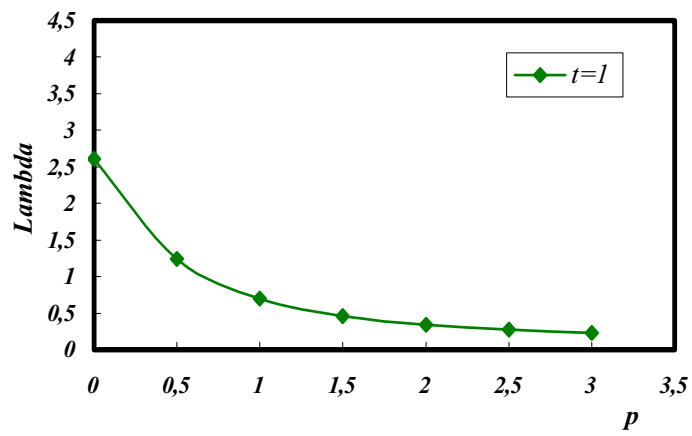
a)



b)



c)



d)

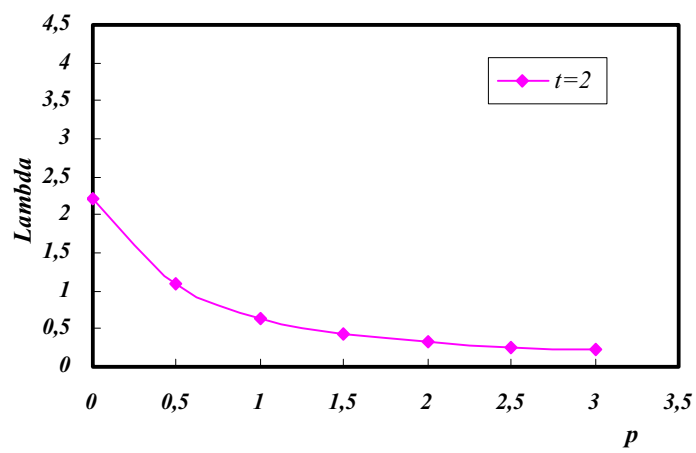


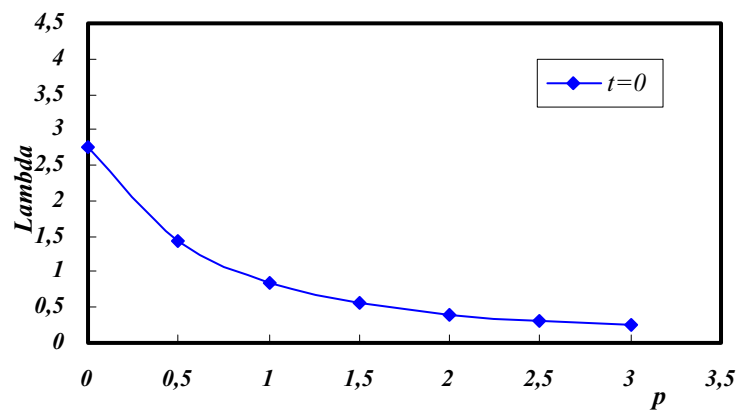
TABLA 16. Influencia del parámetro $t = pi / pe$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR SIMPLEMENTE APOYADO

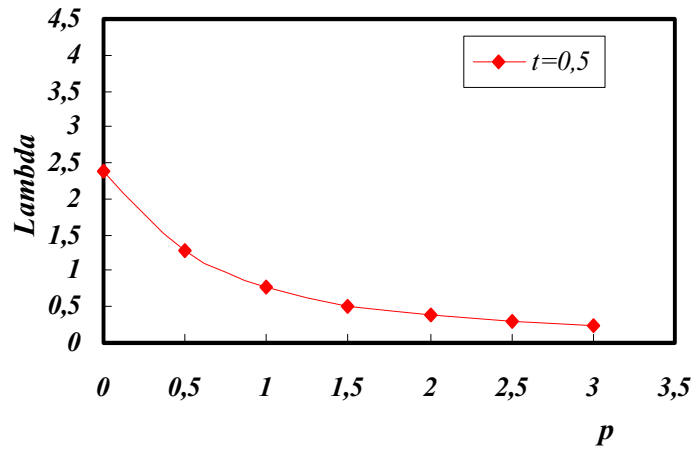
k=0.4

P	t = pi / pe			
	0	0.5	1.0	2.0
0	2.766	2.380	2.084	1.654
0.5	1.422	1.269	1.144	0.954
1	0.835	0.765	0.705	0.610
1.5	0.552	0.516	0.485	0.432
2	0.400	0.381	0.362	0.332
2.5	0.311	0.299	0.288	0.269
3	0.252	0.245	0.239	0.226

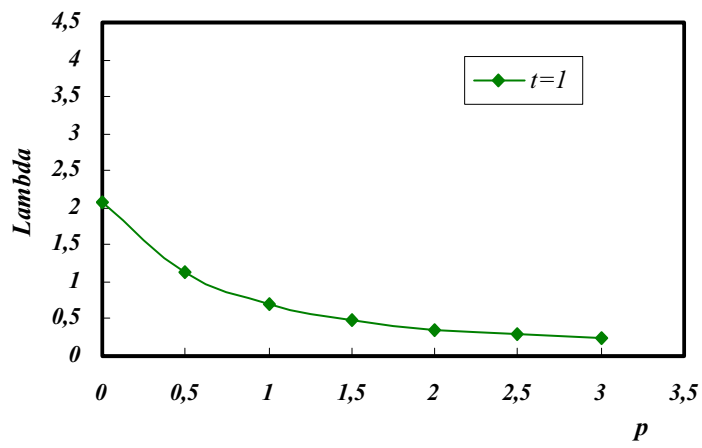
*Gráfico 15. Influencia del parámetro $t=pi / pe$
k=0,4
a)*



b)



c)



d)

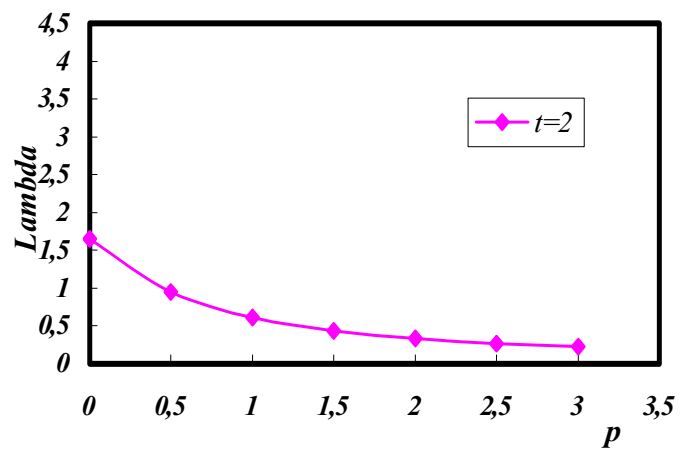


Tabla 17. Influencia del parámetro $t = pi / pe$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR SIMPLEMENTE APOYADO

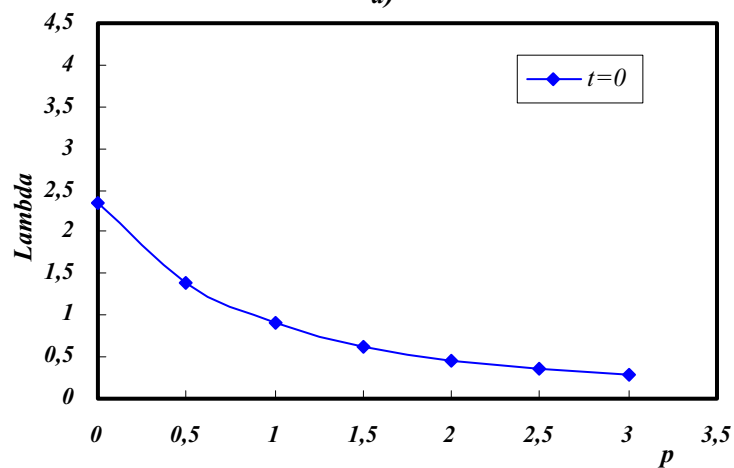
k=0.5

P	$t = pi / pe$			
	0	0.5	1.0	2.0
0	2.537	1.921	1.621	1.232
0.5	1.399	1.186	1.028	0.810
1	0.901	0.788	0.699	0.569
1.5	0.625	0.560	0.507	0.426
2	0.461	0.422	0.389	0.335
2.5	0.358	0.333	0.311	0.275
3	0.289	0.272	0.257	0.232

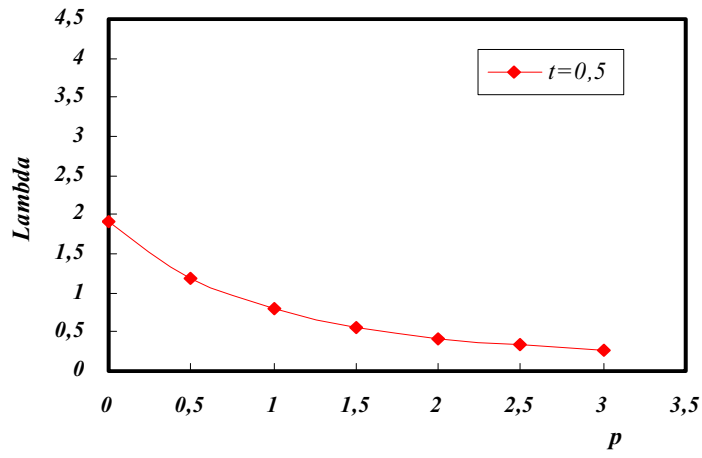
Gráfico 16. Influencia del parámetro $t=pi / pe$

k=0,5

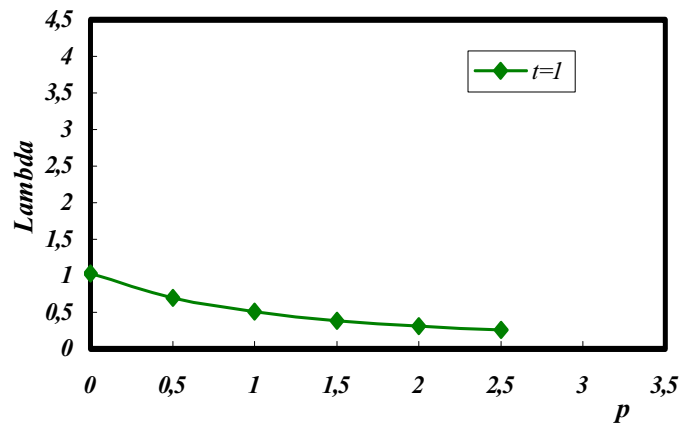
a)



b)



c)



d)

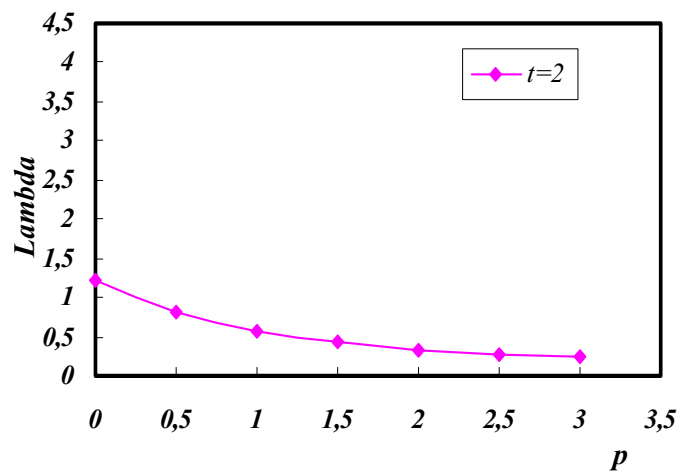


Tabla 18. Influencia del parámetro $t = \pi / p_e$ sobre el coeficiente λ

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR RESTRINGIDO ELASTICAMENTE CONTRA ROTACION

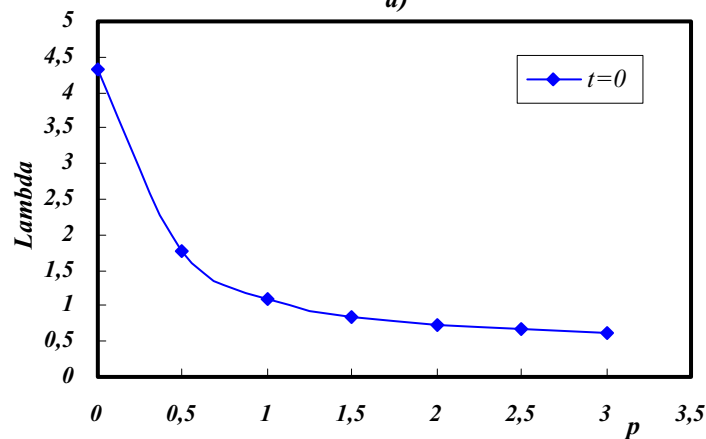
$k=0.1$

p	t = π / p_e			
	0	0.5	1.0	2.0
0	4.321	4.283	4.246	4.173
0.5	1.779	1.770	1.760	1.742
1	1.103	1.100	1.098	1.092
1.5	0.849	0.848	0.847	0.845
2	0.729	0.729	0.728	0.728
2.5	0.666	0.666	0.665	0.665
3	0.630	0.630	0.630	0.630

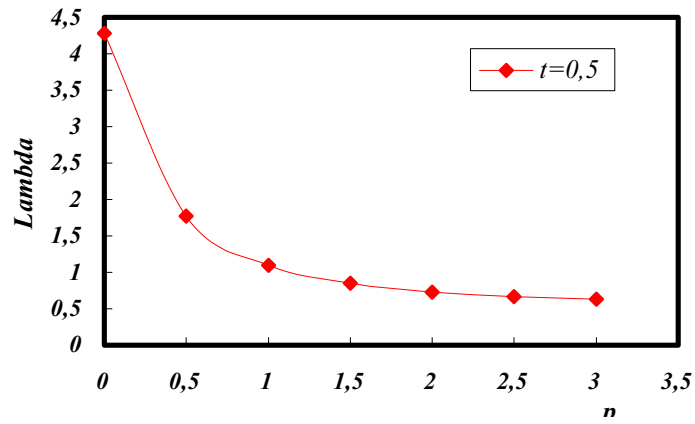
Gráfico 17. Influencia del parámetro $t=\pi / p_e$

$k=0,1$

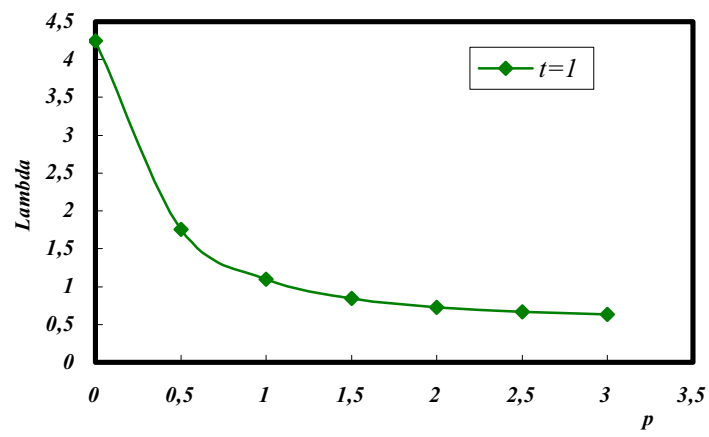
a)



b)



c)



d)

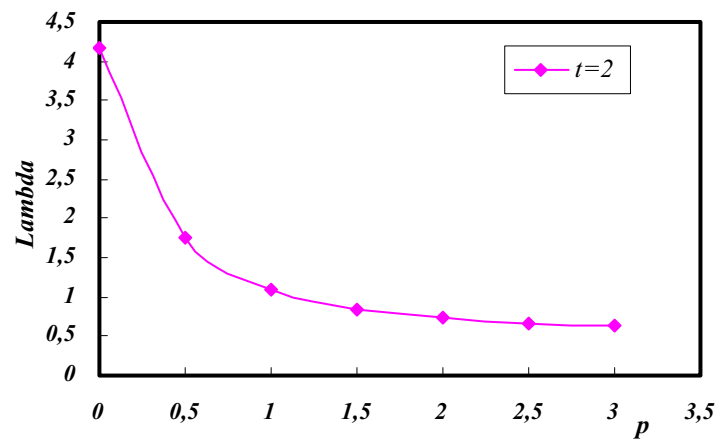


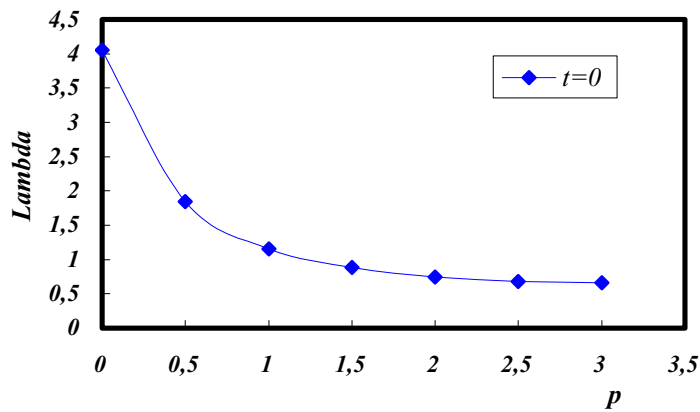
Tabla 19. Influencia del parámetro $t = pi / pe$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR ELASTICAMENTE RESTRINGIDO CONTRA ROTACION

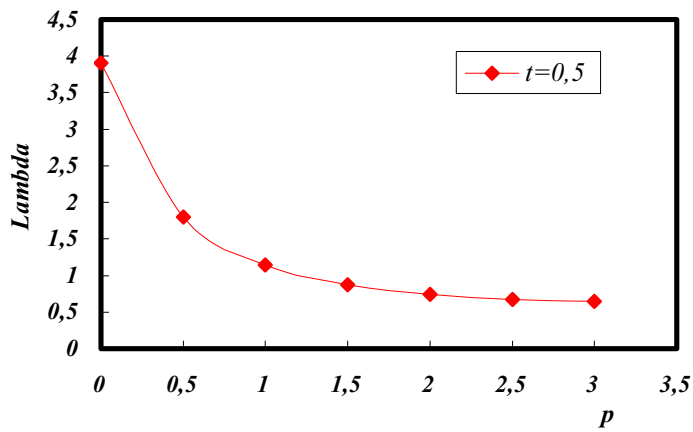
$k=0.2$

p	t = pi / pe			
	0	0.5	1.0	2.0
0	4.049	3.907	3.772	3.523
0.5	1.846	1.803	1.763	1.686
1	1.156	1.140	1.126	1.097
1.5	0.881	0.874	0.868	0.855
2	0.748	0.745	0.742	0.736
2.5	0.677	0.675	0.674	0.671
3	0.664	0.650	0.637	0.612

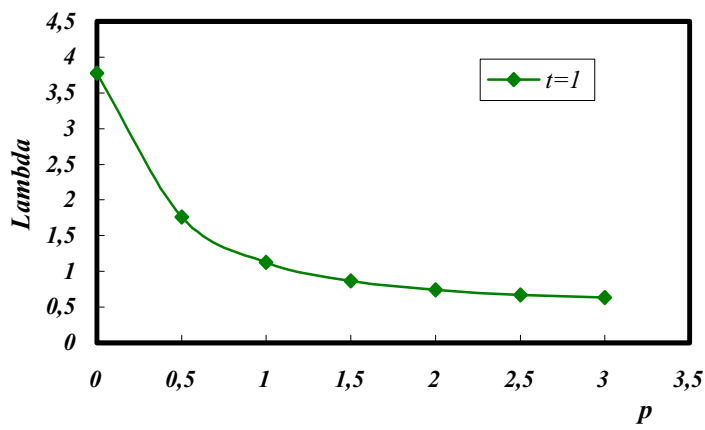
**Gráfico 18. Influencia del parámetro $t = pi / pe$
 $k=0,2$
a)**



b)



c)



d)

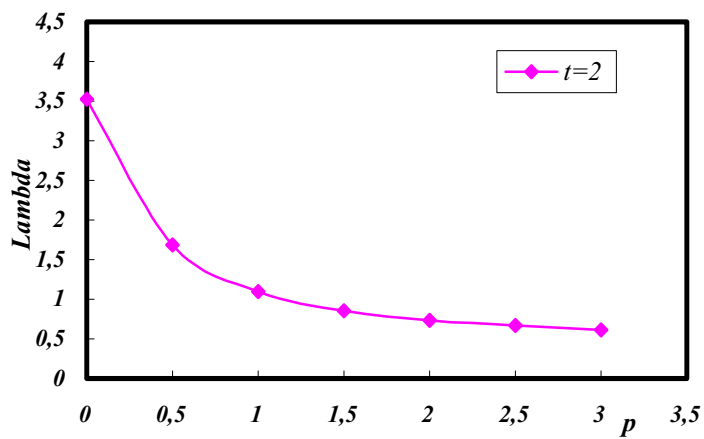


Tabla 20. Influencia del parámetro $t = \pi / p_e$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR RESTRINGIDO ELASTICAMENTE CONTRA ROTACION

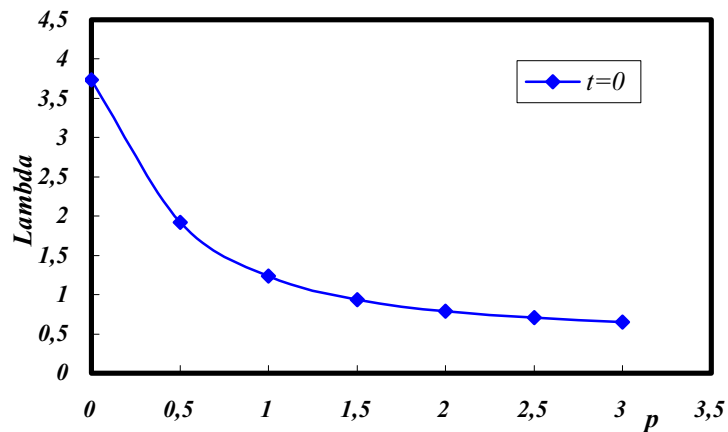
$k=0.3$

p	t = π / p_e			
	0	0.5	1.0	2.0
0	3.733	3.455	3.212	2.806
0.5	1.921	1.821	1.730	1.571
1	1.240	1.197	1.156	1.083
1.5	0.939	0.918	0.898	0.859
2	0.788	0.776	0.765	0.744
2.5	0.704	0.697	0.691	0.678
3	0.655	0.651	0.647	0.640

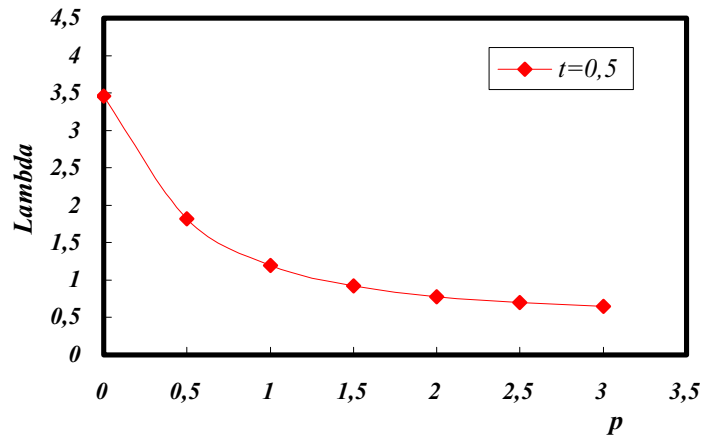
Gráfico 19. Influencia del parámetro $t = \pi / p_e$

$k=0,3$

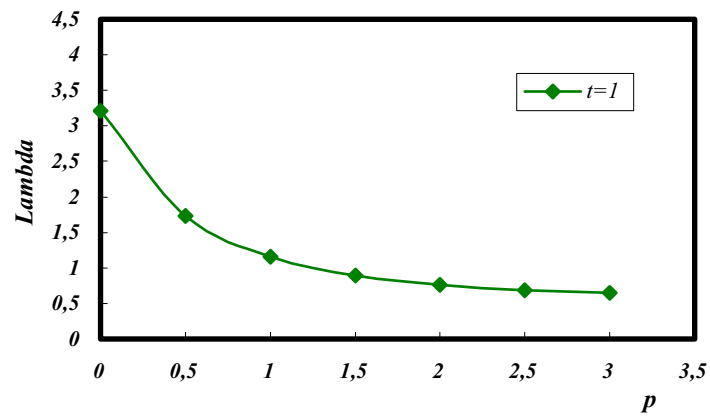
a)



b)



c)



d)

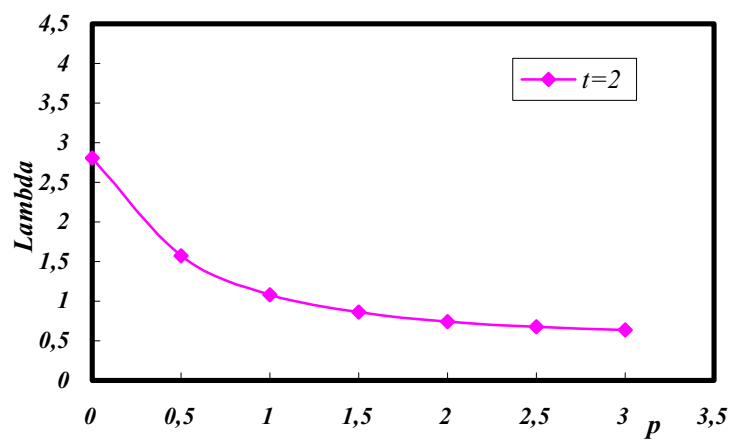


Tabla 21. Influencia del parámetro $t = \pi / p_e$, sobre el coeficiente lambda

PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR RESTRINGIDO ELASTICAMENTE CONTRA ROTACION

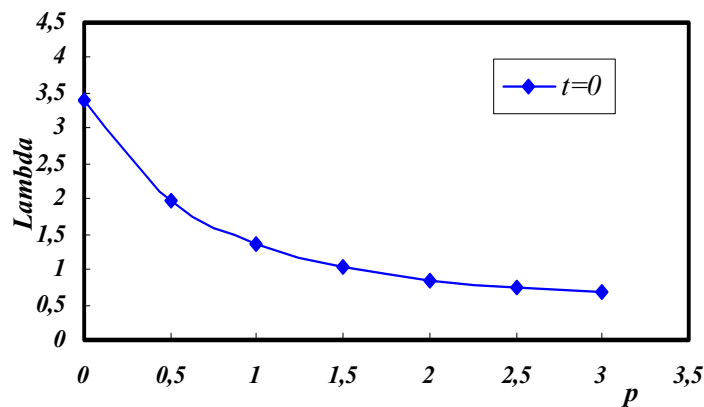
$k=0.4$

P	$t = \pi / p_e$			
	0	0.5	1.0	2.0
0	3.411	3.004	2.678	2.195
0.5	1.990	1.811	1.660	1.420
1	1.348	1.258	1.179	1.046
1.5	1.029	0.979	0.933	0.853
2	0.855	0.825	0.797	0.746
2.5	0.754	0.735	0.717	0.683
3	0.692	0.680	0.668	0.645

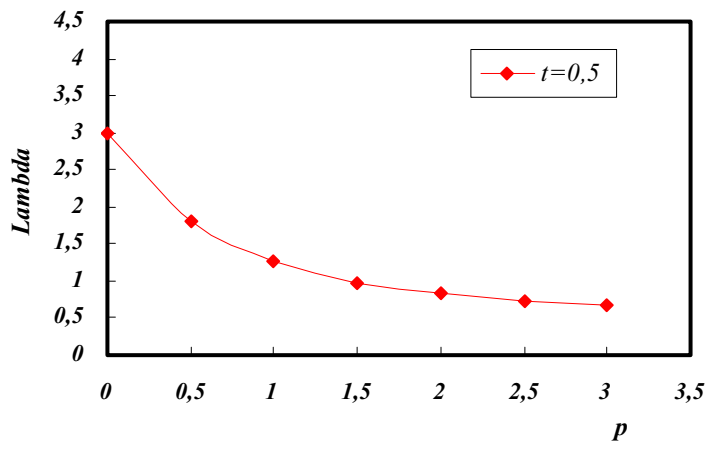
Gráfico 20. Influencia del parámetro $t = \pi / p_e$

$k=0,4$

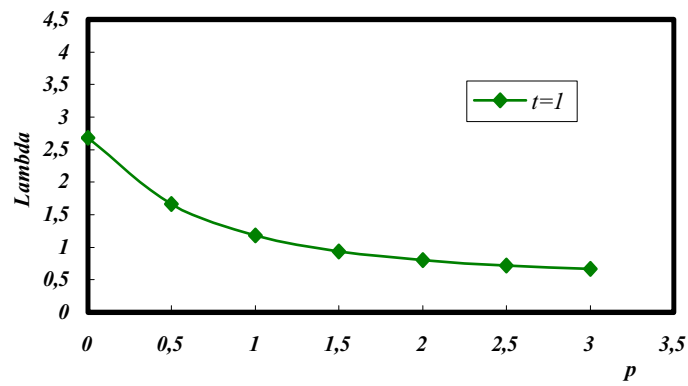
a)



b)



c)



d)

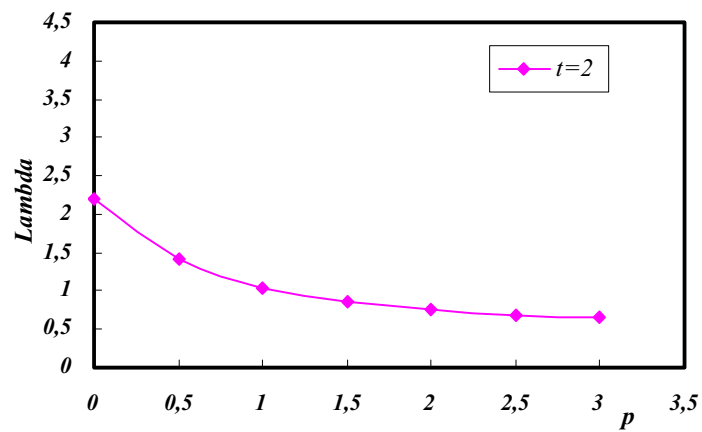
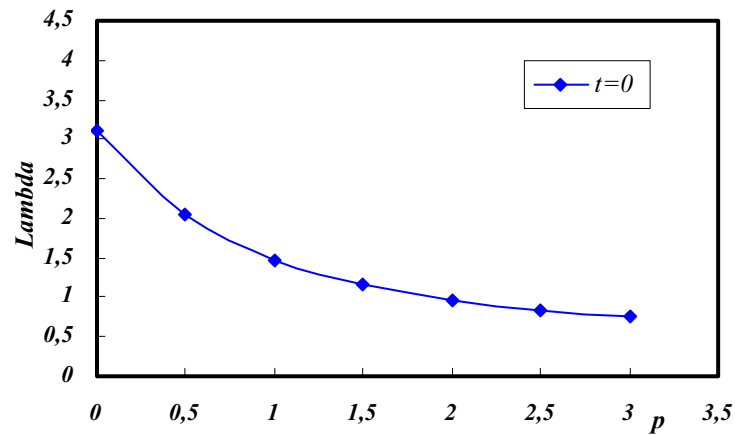


Tabla 22. Influencia del parámetro $t = \pi / pe$, sobre el coeficiente lambda
 PLACA ANULAR CON BORDE EXTERIOR ELASTICAMENTE RESTRINGIDO CONTRA ROTACION

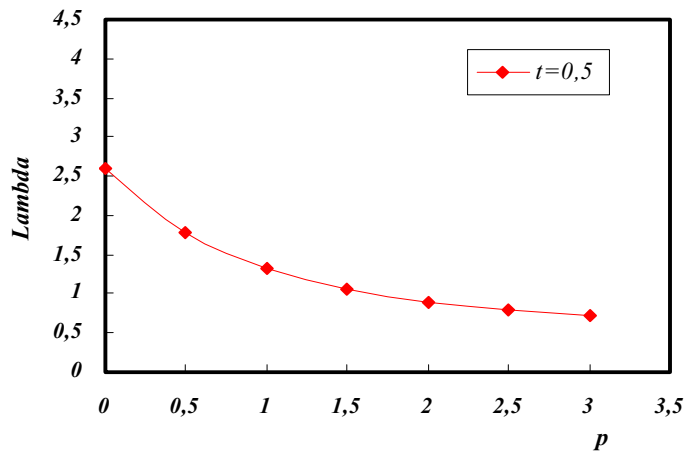
$k=0.5$

p	t = π / pe			
	0	0.5	1.0	2.0
0	3.106	2.595	2.224	1.725
0.5	2.044	1.771	1.561	1.260
1	1.474	1.316	1.188	0.994
1.5	1.151	1.053	0.970	0.837
2	0.958	0.893	0.837	0.742
2.5	0.837	0.793	0.753	0.684
3	0.759	0.728	0.699	0.647

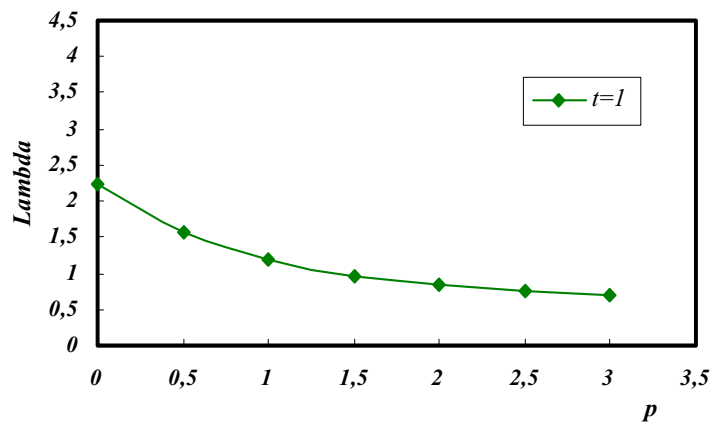
Gráfico 21. Influencia del parámetro $t=\pi / pe$
 $k=0,5$
 a)



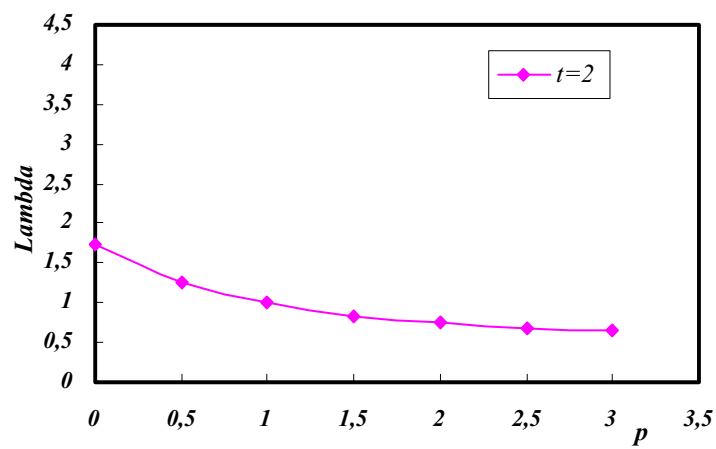
b)



c)



d)



Influencia del coeficiente de Poisson μ sobre el coeficiente λ .

Al efecto de considerar cual es la influencia del coeficiente de Poisson sobre el valor del coeficiente λ , se asignan valores a k_r , m , p , t , k , y se hace variar a μ . Esto se efectuó para borde simplemente apoyado, dado que para esa vinculación, se presentan los valores más bajos de λ . Los valores obtenidos se registran en Tabla 23.

Tabla 23. Variación del coef. λ en función del coeficiente de Poisson

μ	0	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,40	0,45
λ	2.65	2,79	2,85	2,91	2,96	3	3,04	3,07	3,1

En la referencia¹, se dispone de valores para el parámetro λ , cuando el espesor de la placa es variable con discontinuidad, y para cuando $\mu = 0,2$. Estos valores resultan nuevamente orientativos; y para cotejar con los obtenidos en este trabajo, se trabajó con valores de p que se dieron en Tabla 2, pág. 86 . En las Tablas 24 y 25 figuran los valores obtenidos de λ para los casos de borde simplemente apoyado y empotrado respectivamente.

¹ P. A. A. Laura, R. H. Gutierrez, V. Sonzogni and S. Idelsohn. "Buckling of circular, annular plates of nonuniform thickness". Ocean Engng. Vol. 24, No. 1, pp. 51-61. (1997)

TABLA 24. Valores del coeficiente λ para placas anulares con borde exterior simplemente apoyado $\mu = 0.2$

k= a / b	Valores de c / b							
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
0.1	(1)	2.91	2.78	2.65	2.52	2.39	2.24	2.09
	(2)	3.624	3.343	3.107	2.860	2.610	2.409	2.257
0.2	(1)		2.57	2.45	2.34	2.21	2.08	1.94
	(2)		3.55	2.906	2.664	2.432	2.246	2.091
0.3	(1)			2.26	2.16	2.05	1.93	1.79
	(2)			2.793	2.515	2.281	2.081	1.903
0.4	(1)				1.99	1.89	1.78	1.66
	(2)				2.485	2.184	1.975	1.775
0.5	(1)					1.75	1.66	1.55
	(2)					2.239	1.954	1.713
0.6	(1)						1.56	1.45
	(2)						2.028	1.720
0.7	(1)							1.38
	(2)							1.825

(1) Valores obtenidos con Rayleigh-Ritz optimizado para espesor variable con continuidad
 (2) Valores obtenidos por Dr. Ing. Laura et.al para espesor variable con discontinuidad

TABLA 25. Valores del coeficiente λ para placas anulares con borde exterior empotrado
 $\mu = 0,2$

k=a / b	Valores de c / b							
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
0.1	(1)	12,242	11,868	11,487	11,091	10,668	10,211	9,707
	(2)	13,303	12,300	11,692	11,195	10,684	10,070	9,299
0.2	(1)		12,599	12,273	11,922	11,536	11,109	10,629
	(2)		13,194	12,423	11,773	11,099	10,327	9,464
0.3	(1)			14,410	14,409	14,709	13,288	12,800
	(2)			14,865	14,078	13,337	12,392	11,093
0.4	(1)				18,213	17,821	17,362	16,812
	(2)				18,661	17,756	16,729	14,859
0.5	(1)					25,455	24,888	24,182
	(2)					26,005	24,952	22,506

(1) Valores obtenidos con Rayleigh-Ritz optimizado para espesor variable con continuidad
 (2) Valores obtenidos por Dr. Ing. Laura et.al para espesor variable con discontinuidad

CAPITULO 7

CONCLUSIONES

Conclusiones

Fundamentalmente se puede concluir que la aplicación del método de Rayleigh-Ritz optimizado, para abordar el problema del pandeo, constituye un método de implementación sencilla. Cabe mencionar que con las funciones aproximantes que regularmente se utilizan, muestra que la solución aproximada conduce a resultados satisfactorios. Sólo se encuentran condicionadas por las condiciones de contorno esenciales.

La precisión de los resultados depende también de la cantidad de términos considerada. Lógicamente, cuando es superior a dos términos, el trabajo matemático se torna más laborioso. Por otra parte, la consideración de la expresión exacta para la determinación de la fuerza radial, con una sencilla ley de variación del espesor, permite reproducir formas clásicas de espesor, ofreciendo además otras alternativas como el estudio de distintos casos de espesor variable con continuidad, sin necesidad de emplear algún tipo de aproximación al perfil real.

Se puede notar que, a medida que crece el valor del exponente de la ley de variación del espesor, esto significa, que el perfil se aparta de las formas clásicas, como la uniforme, el parámetro λ es menor. Así, por ejemplo para cualquier relación entre las presiones, los coeficientes de la variación lineal son aproximadamente 6 veces más pequeños que los que corresponden a espesor constante. A medida que la variación de espesor es más marcada entre los bordes interno y externo, esta diferencia se sigue acentuando y es muy desfavorable con la condición de apoyo simple.

La alternativa de apoyo elástico contra rotación es de interés especialmente cuando es difícil la reproducción de apoyos rígidos, siendo los valores de λ intermedios entre los correspondientes a apoyo rígido empotrado y apoyo simple. Aunque el rango para suponer que estamos ante una vinculación elástica es pequeño.

En relación a la influencia de la relación entre presiones, los valores más bajos de λ , se presentan si actúan simultáneamente presiones en ambos contornos, y la presión interior predomina sobre la exterior. No presentan prácticamente diferencias cuando el espesor deja de ser constante.

La incidencia del tamaño del orificio, dada por k muestra que para un mismo valor de t y p , cuando el tamaño del agujero va aumentando, también se incrementa λ . Esto se da en el caso de placa con borde empotrado. Sucede lo contrario, si el borde se encuentra simplemente apoyado.

El coeficiente de Poisson, tiene un peso importante sobre el valor del parámetro λ , especialmente cuando el contorno exterior es simplemente apoyado y por ejemplo se incrementa en un 10 % cuando μ varía de 0,1 a 0,4. A medida que aumenta el valor de μ , aumentaría la rigidez y el coeficiente λ .

Por último, y podría interpretarse como el motivo de futuros trabajos, y no se pretende que sea limitativo, la variación de todos los parámetros involucrados, dan una gran cantidad de posibilidades que se pueden analizar, y estudiar el comportamiento de las placas anulares de espesor variable frente al problema del pandeo.

CAPITULO 8

REFERENCIAS

Referencias

D. R. Avalos and P. A. A. Laura. "A note on transverse vibrations of annular plates elastically restrained against rotation along the edges". *Journal of Sound and Vibration*, **66 (1)**, pp. 63-67. (1979).

D. R. Avalos, P. A. A. Laura. "Transverse vibrations of polar orthotropic, annular plates elastically restrained against rotation along the edges". *Journal of Fibre Science and Technology*, **14**, pp. 59-67. (1981).

D. V. Bambill, J. A. Reyes and P. A. A. Laura. "A note on axisymmetric vibrations of annular plates of non-uniform thickness". *Journal of Sound and vibrations*, **191 (4)**, pp. 584-589. (1996).

O. Belluzzi. "Ciencia de la Construcción". Tomo III, Ed. Aguilar . (1970).

C. W. Bert. "Improved technique for estimating buckling loads". *A.S.C.E. Journal of Engineering Mechanical*, **110**, pp. 1655-1665. (1984).

G. H. Bryan. "On the stability of a plane plate under thrust in its own plane with application to the buckling of the side of a ship". *Proc., London Math. Society*, **22**, pp. 54-67. (1891).

W. F. Chen, E. M. Lui. "Structural Stability. Theory and Implementation". Elsevier Science Publishing Co., Inc. (1987).

P. M. Ciancio. "Coeficiente de pandeo para placas anulares con espesor variable". 6º. Congreso Argentino de Mecánica Computacional, Tomo II, pág. 41. Mendoza. (1999).

C.T. Dyka and J. F. Carney III. "Vibrations of annular plates of variable thickness". Journal of the Mech. Engrg. A. S. C. E., **105-EM3**, pp. 361-370. (1979).

U. S. Gupta and A. H. Ansari. "Asymmetric vibrations and elastic stability of polar orthotropic circular plates of linearly varying profiles". Journal of Sound and Vibration, Vol. **215** , No. **2** , pp. 231-250. (1998).

A. Guzmán, R. Saleme. "Elasticidad y Plasticidad". Edición del C. E. I. L. P. (1970).

R. K. Jain . "Vibrations of circular plates of variable thickness under and implane force". Journal of Sound and Vibration , **23 (4)**, pp. 407-414. (1972).

G. Lamé. "Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides". Paris. (1852).

P. A. A. Laura, J. C. Paloto and R. D. Santos. "A note on the vibration and stability of a circular plate elastically restrained against rotation". Journal of Sound and Vibration, **41**, pp. 177-180. (1975).

P. A. A. Laura, L. C. Nava and H. Cortinez. "A modification of the Galerkin method and the solution of Helmholtz equation in regions of complicated boundary shape". Journal of Acoust. Soc. América, **77**, pp. 1960-1962. (1985).

P. A. A. Laura, G. M. Ficcadenti and S. I. Alvarez. "*Effect of geometric boundary disturbances on the natural frequencies and buckling loads o vibrating clamped circular plates*". Journal of Sound and Vibration, **126**, pp. 67-72. (1988).

P. A. A. Laura, L. Ercoli and R. Gutierrez. "*Optimized Rayleigh-Ritz Method*". Institute of Applied Mechanics. Monograph. 95-34. (1995).

P. A. A. Laura, R. H. Gutierrez, V. Sonzogni and S. Idelsohn. "*Buckling of circular, annular plates of non-uniform thickness*". Institute of Applied Mech., **96 (6)**. (1996).

A.W. Leissa . "*Vibration of Plates*". NASA SP-160. Washington, D. C. U. S. Government Printing Office. (1969).

C. W. Lim and K. M. Liew. "*Vibration of perforated plates with rounded corners*". Journal of Engineering Mechanics, **121**, No. **2**, ASCE . (1995).

H. Matsunaga. "*Buckling instabilities of thick elastic plates subjected to in-plane stresses*". Journal Eng., Comut & Tech., **62**, pp. 205-214. (1997).

K. Kanaka Raju and G. Venkateswara Rao. "*Post-buckling analysis of moderately thick elastic circular plates*". Journal of Applied Mech., **50 (2)**, pp. 468-470. (1983).

G. K. Ramaiah, K. Vijayakumar. "*Vibrations of annular plates with linear thickness profiles*". Journal of Sound and Vibrations, **40 (2)**, pp. 293-298. (1975).

G. Venkateswara Rao, N. Rajasekhara Naidu and K. Kanaka Raju. "Postbuckling of Moderately thick Circular Plates with Edge Elastic Restraint". Journal of Engrg. Mech. Vol. **120 (10)**, pp. 2232-2238. (1995).

R. Schmidt. "Away of estimating lower bounds for eigenvalues in buckling and vibrations problems". Industrial Math, **33**, pp. 163-167. (1983).

S. R. Soni, C. L. Amba-Rao. "Axisymmetric vibrations of annular plates of variable thickness". Journal of Sound and Vibration, **38(4)**, pp. 465-473. (1975).

V. E. Sonzogni, D. V. Bambill, R. H. Gutierrez, D. R. Avalos, H. A. Larrondo, P. A. A. Laura. "Vibración de placas con orificios y espesor variable". X Jornadas Argentinas del Hormigón Pretensado, XV Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural. Tomo II. pp. 213-229. (1996).

S. Timoshenko, Woinowsky, Krieger. "Teoría de Placas y Láminas". Ediciones Urmo. (1959).

S. Timoshenko . "Teoría de la Estabilidad Elástica". Editorial Ediar. (1961).

S. Timoshenko, Goodier. "Teoría de la Elasticidad". Editorial Urmo. (1968).

C. M. Wang, Y. Xiang, S. Kitipornchai and K. M. Liew. "Axisymmetric buckling of circular Mindlin plates with ring supports". Journal of Structural Engrg. A. S. C. E., Vol. **119 (3)**, pp. 782-793 . (1993).

C. M. Wang and L. Wang. "*Vibration and buckling of super elliptical plates*". Journal of Sound and Vibration, **171 (3)**, pp. 301-314. (1994).

Yianquiao Ye. "*Axisymmetric buckling of homogeneous and laminated circular plates*". Journal of Structural Engineering. (1995).